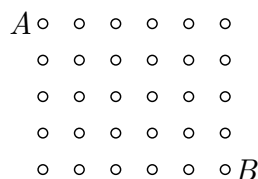


9. ÖSSZEFÜGGŐSÉG, FÁK

1. Az ábrán látható karikák egy telken lévő gyümölcsfákat jelölik.



Az A -val jelölt fán egy cinke, a B -vel jelölt fán egy rigó ül. Mindkét madár az egyik fáról csak a legközelebbi ÉNy-i, ÉK-i, DNy-i vagy DK-i irányban lévő fák egyikére repül. Lehetséges-e, hogy valamikor mindkettő ugyanazon a fán ül?

2. Igazoljuk, hogy egy gráf akkor és csak akkor nem összefüggő, ha pontjait két nemüres osztályba tudjuk sorolni úgy, hogy különböző osztálybeli pontok között ne vezessen él.

3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G egyszerű gráfra G vagy $\overline{G}$ összefüggő.

4. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább n , akkor a gráf összefüggő.

5. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfnak legalább $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ éle van, akkor összefüggő. Igaz marad-e az állítás, ha a gráfnak csak $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ éle van?

6. Egy 2022 pontú fában minden csúcs foka 1 vagy 3. Hány levele van a fának?

7. Mutassuk meg, hogy egy n pontú összefüggő gráfnak legalább $n - 1$ éle van.

8. Létezik-e olyan összefüggő gráf, amelynek foksámsorozata $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4$?

9. Igazoljuk, hogy bármely legalább kétpontú összefüggő gráfban van olyan csúcs, amelyet elhagyva a maradék gráf is összefüggő.

10. Igazoljuk, hogy ha egy (legalább 2 pontú) teljes gráf éleit pirosra és kékre színezzük, akkor kialakul olyan feszítőfa, melynek minden éle ugyanolyan színű.

11.⁺ Egy társaságban néhányan korábban már ismerik egymást, de nem mindenki ismer mindenkit. Minden este a társaság egyik tagja meghívja az összes (aktuális) ismerőst a társaságból egy partira, ahol bemutatja őket egymásnak. Tegyük fel, hogy már mindenki tartott legalább egy ilyen partit, de Anna és Béla még nem ismerősök. Igazoljuk, hogy ők a következő partin sem lesznek bemutatva egymásnak.

12. Egy G gráfban nincs kör, G komponenseinek száma c . Bizonyítsuk be, hogy G éleinek száma $n - c$.

13. Igazoljuk, hogy ha egy n pontú gráfnak legalább n éle van, akkor a gráf tartalmaz kört.

14. a) Mutassuk meg, hogy egy összefüggő gráfban bármely két leghosszabb útnak van közös pontja.

b) Mutassuk meg, hogy egy fában a leghosszabb utak lefoghatók egyetlen ponttal. (Azaz van olyan pont a fában, amelyen az összes maximális hosszúságú út áthalad.)

Megjegyzés: Megadható olyan összefüggő (nem fa) gráf, amelyben nincs ilyen pont. (De nem könnyű ilyen gráfot találni.)

15. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf nem tartalmaz páratlan (hosszú) kört, akkor a gráf csúcsait ki lehet színezni két színnel úgy, hogy minden él két végpontja különböző színű legyen.

16.⁺ Egy középkori országban 1000 város van, és bizonyos városok közvetlen földúttal vannak összekötve (csak városokban van útkereszteződés). Ezen az úthálózaton bármelyik városból bármelyik másikba el lehet jutni. Az uralkodó szeretne bizonyos földutakat leköveztetni úgy, hogy minden városból páratlan sok kövesút induljon ki. Mutassuk meg, hogy ez megtehető.

17.⁺ Egy $n \times n$ -es táblázat minden mezőjében egy-egy betű van. A táblázat bármely két sora különböző. Bizonyítsuk be, hogy a táblázatnak van olyan oszlopa, amelyet elhagyva a megmaradó táblázatnak sincs két egyező sora.