

6. REKURZIÓK

1. Hányféleképpen lehet lefedni egy $2 \times n$ -es téglalapot dominókkal (1×2 -es téglalapokkal)?
2. Egy építőjátékunk van, amely piros és kék téglákat tartalmaz. Hányféleképpen lehet ilyen téglákból n magas tornyot építeni, ha nem engedjük meg, hogy két piros téglát szomszédos szintre kerüljön? (A téglák a színektől eltekintve egyformák. Minden szintre egy téglát kerül.)
3. Hányféleképpen lehet az n számot pozitív egészek összegére bontani, ha számít a tagok sorrendje?
4. Hányféleképpen lehet az n számot *páratlan* pozitív egészek összegére bontani, ha számít a tagok sorrendje?
5. n forintunk van. Minden nap pontosan egy dolgot veszünk a következők közül (zárójelben az egységár): percek (1 forint), fagylalt (2 forint), csoki (2 forint). Hányféleképpen költhetjük el a pénzünket?
6. Legyen s_n azoknak az n jegyű, csak 0, 1, 2 számjegyeket tartalmazó számoknak a száma, amelyekben bármely két szomszédos számjegy legfeljebb 1-gyel tér el egymástól. Igazoljuk, hogy $n \geq 3$ -ra $s_n = 2s_{n-1} + s_{n-2}$.
7. Oldjuk meg a következő lineáris rekurziókat.
 - a) $a_0 = 1, a_1 = 6; a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
 - b) $a_0 = 3, a_1 = 6; a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
 - c) $a_0 = 1, a_1 = 2; a_n = 6a_{n-1} - 7a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
 - d) $a_0 = 1, a_1 = 1; a_n = 4a_{n-1} - 2a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
 - e) $a_0 = 6, a_1 = 8; a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
 - f) $a_0 = 3, a_1 = -3; a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
 - g) $a_0 = 1, a_1 = 1; a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
 - h) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 13; a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3}$ (ha $n \geq 3$).
 - i) $a_0 = 17, a_1 = 14, a_2 = 110; a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$ (ha $n \geq 3$).
8. Adjunk meg egy olyan másodrendű lineáris rekurziót, amelynek a megoldása:

$$a_n = 3 \cdot 5^n + (-4)^n.$$

9. Hányféleképpen lehet egy konvex $(n+2)$ -szöget egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontani?
10. Egy kör alakú asztal körül $2n$ -en ülnek. Hányféleképpen alakozhatnak az asztal körül ülők n párt úgy, hogy az egy párban lévők kezét foghassanak anélkül, hogy egy másik kezét fogó pár keze alatt vagy felett át kellene nyúlniuk? (Az asztal felett való átnyúlás megengedett.)
11. Bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k = F_{2n}.$$

Lineáris rekurzió megoldása Wolfram Alphával:

A 6/b. feladat megoldása: `solve a(0)=3, a(1)=6, a(n)=a(n-1)+6a(n-2)`