

5. LOGIKAI SZITA

1. Egy választás előtti közvélemény-kutatás bejelenti, hogy arra az eredményre jutott, hogy az A , B , illetve C párttal a megkérdezettek rendre 65%, 57%, illetve 58%-a szimpatizál. Továbbá, 28% számára szimpatikus mind A , mind B , 30% számára szimpatikus mind A , mind C , és 27% számára szimpatikus mind B , mind C . Végül a megkérdezettek 12%-a mindhárom párttal szimpatizál. Mi a véleményünk erről a bejelentésről?

2. Hány olyan sorbaállítása van az angol ábécé 26 betűjének, mely egymás utáni három betűként a LOM, HOZ és ZAB szavak egyikét sem tartalmazza?

3. Hány olyan n -nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amelynek minden prímosztója legalább kétjegyű?

4. Hányféleképpen lehet a 3×3 -as négyzet kilenc mezőjét pirosra és kékre színezni úgy, hogy semelyik 2×2 -es résznégyzet (a sarkoknál) ne legyen teljesen piros? [A mezők meg vannak különböztetve, például meg vannak számozva 1-től 9-ig.]

5. Hányféleképpen lehet 10 lapot kiválasztani az 52 lapos franciakártya-csomagból úgy, hogy a kiválasztott lapok között mind a négy szín előforduljon?

6. Egy pékség négyféle zsemlét árul: mákosat, szezámmagosat, bajort és normált. Az egyes fajtákból rendre 3, 4, 5 és 6 darab van a boltban. 12 zsemlét szeretnénk venni. Hányféleképpen állíthatjuk össze a rendelést?

7. (Vö. 1. feladatsor.) Hány olyan hétjegyű szám van, amely csak 1, 2 és 5 számjegyeket tartalmaz (mindegyiket legalább egyszer)?

8. Hány olyan tízjegyű telefonszám van, amelyben mindegyik páratlan számjegy előfordul legalább egyszer? (A telefonszámokra nincs semmilyen megkötés, például a 0000000000 is egy telefonszám.)

9. Hány szürjektív $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, k\}$ leképezés van?

10. Legyen $\phi(n)$ az n -nél nem nagyobb, n -hez relatív prím pozitív egészek száma. Mutassuk meg, hogy ha n prímtényezőss felbontása $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, akkor

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

11. (Elcserélt levelek problémája.) Valaki n levelet ír, és megcímezi a hozzájuk tartozó n borítékot, majd a leveleket véletlenszerűen a borítékokba teszi.

- Hányféleképpen fordulhat elő, hogy egyik levél sem a saját borítékjába kerül?
- Hányféleképpen fordulhat elő, hogy pontosan k levél kerül a saját borítékjába?

12. Egy gálavacsorán n házaspár vesz részt. Mind a $2n$ jelenlévő egy pohárköszöntőt mond az este folyamán. Hányféle sorrendben lehet megtartani a pohárköszöntőket úgy, hogy semelyik házaspár két tagja ne következzen (közvetlenül) egymás után?

13. Hányféleképpen lehet egy n elemű halmazt k darab különböző, m elemű részhalmazával lefedni?

14. Hány olyan $\pi: \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ bijekció van, amelyre $\pi(i+1) - \pi(i) \neq 1$ teljesül minden i -re ($1 \leq i \leq n-1$)?

15. Hányféleképpen lehet egy szabályos n -szög csúcsait kiszínezni k színnel úgy, hogy semelyik oldal két végpontja ne legyen ugyanolyan színű?

16. Bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq n < k; \\ n!, & \text{ha } n = k. \end{cases}$$

17. Bizonyítsuk be, hogy $m, n \geq 1$ esetén

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m}{k} \binom{m-k}{n-k} = 0.$$