

3. MULTIHALMAZOK

1. Egy kirándulásra gyümölcskosarat viszünk. Otthon öt alma, két körte, három banán és hat narancs van, ebből kell összeállítanunk a kosarat. Hányféle lehet a kirándulásra vitt gyümölcskosár, ha azt is számoljuk, amikor nem viszünk semmit sem? (Az azonos fajtájú gyümölcsök teljesen egyformák.)

2. Van k fajta gyümölcsünk. Az i -edik fajtából a_i egyforma darab van. A gyümölcsöket két egyforma tálcán szeretnénk két csoportba osztani (üres csoport is megengedett). Hányféle módon tehetjük ezt meg?

3. Egy pékségben nyolcfajta fánk kapható. A barátainknak szeretnénk egy doboz fánkot venni, amely 12 fánkot tartalmaz. Hányféleképpen állíthatjuk össze a doboz tartalmát a bolt kínálatából? (Az azonos fajta fánkokat nem különböztetjük meg. A bolt minden rendelést ki tud szolgálni.)

4. Az alábbi egyenletnek hány megoldása van a nemnegatív egészek körében?

$$a + b + c + d = 2022.$$

5. Hányféleképpen oszthatunk el k db (egyforma) egyforintost n (különböző) gyerek között úgy, hogy

- a) tetszőleges elosztás megengedett;
- b) mindenki kapjon legalább egyet;
- c) az i -edik gyerek legalább i forintot kapjon ($i = 1, \dots, n$);
- d) mindenki páros sok forintot kapjon;
- e) mindenki páratlan sok forintot kapjon?

6. Hányféleképpen lehet az alábbi listában kitölteni a hiányzó pontszámokat úgy, hogy a fiúk összesített pontszáma 100 pont, a lányok összesített pontszáma 90 pont legyen? (Minden pontszám egy tetszőleges nemnegatív egész szám lehet.)

EREDMÉNYEK:	
Á. Tamás	... pont
B. Erika	... pont
F. Gábor Zoltán	... pont
H. Viktor	... pont
H. Ádám Ferenc	... pont
I. Ferenc	... pont
K. Beatrix	... pont
K. Csilla Ildikó	... pont
K. Kata	... pont
N. Ádám	... pont
O. Ramóna	... pont
Sz. Dorka	... pont
V. Kristóf	... pont

7. Hány monoton növekvő $\{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}$ függvény van? (Egy f függvény monoton növekvő, ha $x < y$ esetén $f(x) \leq f(y)$.)

8. Mutassuk meg, hogy a $\{0, 1, \dots, 2n+1\}$ alaphalmaz felett 4^n darab olyan n elemű multihalmaz adható meg, amelyben az $1, 2, \dots, 2n+1$ elemek multiplicitása legfeljebb 1 (és a 0 elem multiplicitása tetszőleges).

9. Hány olyan k elemű multihalmaz van az $\{1, \dots, 2n\}$ halmaz felett, amelyben $1, 2, \dots, n$ multiplicitása legfeljebb 1, és $n+1, n+2, \dots, 2n$ multiplicitásai párosak?

10.⁺ Bizonyítsuk be, hogy $\sum c_1 \dots c_k = \binom{n+k-1}{2k-1}$, ahol az összegezés az összes olyan nemnegatív egészekből álló $\{c_i\}_{i=1}^k$ sorozaton fut végig, amelyre $c_1 + \dots + c_k = n$.