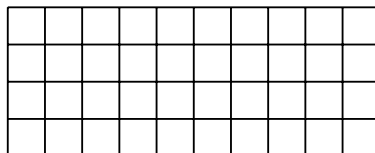


2. BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓK, POLINOMOK

1. Hány olyan részhalmaza van az $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ halmaznak, amely pontosan három egyjegyű számot tartalmaz?

2. Hány téglalapot határoznak meg az alábbi rács vonalai?



3. A Bolyai Közlekedési Vállalat (BKV) jegyein az alábbi 5×5 -ös számtáblázat szerepel:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Az előírás szerint a buszon található lyukasztónak tíz számot kell kilyukasztania úgy, hogy minden sorban pontosan kettő legyen kilyukasztva. (Az oszlopokra nincs megkötés.) Hány ilyen lyukasztási mód van?

4. Felveszünk 30 különböző pontot a síkon úgy, hogy ne legyen három egy egyenesen. Minden pontot minden ponttal összekötünk, és az összekötő szakaszokat pirossal vagy kézzel színezzük. Minden pontból pontosan 12 kék színű szakasz indul ki, a többi pedig piros. Vizsgáljuk az így kialakult háromszögeket. Ha egy háromszög minden oldala ugyanolyan színű, akkor a belsejét is kiszínezzük. Összesen hány háromszöget színezzük be? [Szakest, 2018]

5.⁺ Mi a valószínűsége annak, hogy egy lottóhúzás öt száma között van legalább két szomszédos (azaz két olyan szám, amelynek különbsége 1)?

6. Igazoljuk, lehetőleg kombinatorikus módon, hogy $\binom{2n}{2k+1}$ páros.

7. Igazoljuk a következő kongruenciákat (mod 2):

$$\binom{2n}{2k+1} \equiv 0, \quad \binom{2n}{2k} \equiv \binom{n}{k}, \quad \binom{2n+1}{2k} \equiv \binom{n}{k}, \quad \binom{2n+1}{2k+1} \equiv \binom{n}{k}.$$

8. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat:

a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$

b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0, \quad \text{ha } n \geq 1.$

c) $0 \binom{n}{0} + 1 \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + \dots + n \binom{n}{n} = n 2^{n-1}.$

d) $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$

9. Igazoljuk kettős leszámlálással az alábbi ismert összefüggéseket:

a)
$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \binom{n+1}{2}$$

b)
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$$

10. a) A binomiális tételre való hivatkozás nélkül, kettős leszámlálással bizonyítsuk, hogy minden n és m pozitív egészre teljesül, hogy

$$(m+1)^n = 1 + \binom{n}{1}m + \binom{n}{2}m^2 + \binom{n}{3}m^3 + \dots + \binom{n}{n}m^n.$$

b) Miért következik az előző pontból a binomiális tétel?

11.⁺ Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor

$$(5 + \sqrt{26})^n$$

tizedestört-alakjában a tizedesvesszőt követő első n jegy egyenlő.

12. a) Minden négyjegyű számra kiszámoljuk a számjegyek összegét. Mennyi lesz az így kapott 9000 összeg összege?

b) Minden négyjegyű számra kiszámoljuk a számjegyek szorzatát. Mennyi lesz az így kapott 9000 szorzat összege?

13. Indokoljuk meg, hogy a következő két feladatnak mi köze van egymáshoz, és a b) feladatot az a) feladat felhasználásával oldjuk meg:

a) Határozzuk meg az $(1 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20})(1 + x^{10})(1 + x^{20} + x^{40})$ polinomszorzás eredményét. Ehhez használhatunk számítógépet. (A honlapomon bemutatom egy példával, hogy hogyan lehet polinomokat szorozni az ingyenes Wolfram Alphával.)

b) Pénztárcánkban négy 5-forintos, egy 10-forintos, és két 20-forintos van. Milyen összegeket tudunk pontosan kifizetni (tehát úgy, hogy a pénztárosnak ne kelljen visszaadni)? Az egyes kifizetéseknél hány lehetőségünk van?

14.⁺ Lehetséges-e két dobókockát úgy „cinkelni” (tehát az egyes számok dobásának valószínűségét úgy megváltoztatni), hogy a feldobások után a kapott számokat összeadva 2-től 12-ig minden lehetséges összeg bekövetkezésének valószínűsége azonos legyen?