

1. KOMBINATORIKUS ALAPELVEK

1. Hányféleképpen lehet elhelyezni a fehér és fekete királyt az üres 8×8 -as sakktáblára úgy, hogy ne üssék egymást?
2. Hány 5-tel osztható hétjegyű palindrom szám van?
3. Hány olyan egész szám van 0-tól 999.999-ig, amely tartalmaz 3-as számjegyet?
4. Az $\{1, 2, \dots, 100\}$ halmaznak hány páratlan elemszámú részhalmaza van?
5. A $\{2, 4, 6, \dots, 16\}$ halmaz összes részhalmazára kiszámoljuk az elemek összegének utolsó számjegyét. (Az üres halmaz elemeinek összege 0.) Igazoljuk, hogy minden lehetséges végződés páros sokszor fordul elő.
- 6.⁺ (Kis Fermat-tétel.) Igazoljuk kombinatorikus érveléssel, hogy tetszőleges p prímszám és a pozitív egész esetén $p \mid a^p - a$.
7. Legyen U egy n elemű (alap)halmaz. Határozzuk meg azoknak az (X, Y) pároknak a számát, amelyekre $X \subseteq Y \subseteq U$.
8. Az alábbiak közül mely természetes számokból van több 1.000.000-ig:
 - (i) amelyek csak 1, 2 és 5 számjegyeket tartalmaznak (mindegyiket legalább egyszer),
 - (ii) amelyek csak 3, 8 és 9 számjegyeket tartalmaznak (mindegyiket legalább egyszer),
 - (iii) amelyek csak 3, 8 és 0 számjegyeket tartalmaznak (mindegyiket legalább egyszer)?
9. Hányféleképpen bonthatjuk fel az n számot pozitív egészek összegére, ha a tagok sorrendje is számít, és az egytagú összeg is megengedett? (Például $n = 3$ esetén 4 ilyen felbontás van: $1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3$.)
10. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tau(j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \approx \ln n,$$

ahol $\tau(j)$ a j szám osztóinak számát jelöli. (Az első egyenlőséget kell bizonyítani.)

11. Legyen $n \geq 2$. Ki lehet-e tölteni egy $n \times n$ -es táblázatot a $-1, 0$ és 1 számokkal úgy, hogy minden sorban, minden oszlopban és a két átlóban is különböző legyen az ott álló elemek összege?
12. Egy egységnyi oldalhosszú négyzetbe elhelyeztünk öt pontot. Bizonyítsuk be, hogy lesz köztük kettő, amelyek távolsága legfeljebb $\sqrt{2}/2$.
13. Igazoljuk, hogy minden k természetes számnak létezik olyan többszöröse, amely csak 0 és 1 számjegyeket tartalmaz.
14. Egy 6×6 mezőből álló „sakktáblát” hézagmentesen és átfedés nélkül dominólapokkal fedünk le. Mindegyik dominólap két szomszédos mezőt takar le. Bizonyítandó, hogy a mezőket elválasztó 5 vízszintes és 5 függőleges vonal között van olyan, amely egyetlen dominólapot sem vág ketté. (OKTV, 1963.)