

2. ZÁRTHELYI DOLGOZAT, $\mathbf{F}$ CSOPORT

1. (5,5 pont) Számítsd ki az alábbi mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -3 \\ -5 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. (5,5 pont) Adj meg az alábbi mátrix $\lambda = 1$ sajátértékéhez tartozó sajátalterében egy bázist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -3 \\ 6 & 8 & 5 & 6 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

3. (5,5 pont) Elemi bázistranszformáció segítségével oldd meg a következő mátrixegyenletet:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}.$$

4. (5,5 pont) Hozd kanonikus alakra a $2x_1^2 + 2x_2^2 + 24x_3^2 + 2x_1x_2 - 12x_1x_3$ kvadratikus alakot, és állapítsd meg a definittségét!

5. (6 pont) Az alábbi mátrix egy gazdaság ráfordítási mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,6 \\ 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

Döntsd el, hogy működőképes-e a gazdaság, valamint add meg a $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ nettó kibocsátáshoz szükséges összkibocsátás mennyiségét!

6. (6 pont) Határozd meg a következő mátrix rangját a p paraméter értékétől függően!

$$\begin{pmatrix} 1 & -5 & p & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & p & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. (6 pont)

- V egy 2014 dimenziós vektortér. U_1 egy 40 dimenziós altér, U_2 pedig egy 50 dimenziós altér V -ben. Mennyi az $U_1 + U_2$ altér dimenziója, ha az $U_1 \cap U_2$ altér 25 dimenziós?
- Egy 3×3 -as mátrix utolsó sora „0 0 7”. (Tehát a mátrix jobb alsó sarkában 7-es áll, a sor többi eleme 0.) Következik-e ebből, hogy a mátrixnak sajátértéke a 7? (Ha igen, bizonyítsuk be; ha nem, adjunk ellenpéldát.)

Válaszainkat mindig részletesen indokoljuk!

Jó munkát!