

2. ZÁRTHELYI DOLGOZAT

1. (6 pont) Az alábbi mátrix egy gazdaság ráfordítási mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,2 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Dönts el, hogy működőképes-e a gazdaság, valamint add meg az $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ nettó kibocsátáshoz szükséges összkibocsátás mennyiségét!

2. (5 pont) Oldd meg a következő mátrixegyenletet:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 1 & 5 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

3. (5 pont) Határozd meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér $[(1, 1, 2, 2), (0, -1, 3, 1), (2, -1, 1, 0), (-1, 0, 7, 4)]$ alterének dimenzióját!

4. (6 pont) Adj meg az alábbi mátrix $\lambda = 2$ sajátértékéhez tartozó sajátalterében egy bázist:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

5. (6 pont) Hozd kanonikus alakra az $x_1^2 + 3x_2^2 + 22x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 16x_2x_3$ kvadratikus alakot, és állapítsd meg a definittségét!

6. (6 pont) Határozd meg, hogy az x paraméter mely értékeire invertálható az alábbi mátrix, és ezekre az értékekre számítsd ki a mátrix inverzét (a paraméter függvényében):

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2x \\ 0 & 2 & x \end{pmatrix}.$$

7. (6 pont) Dönts el (bizonyítással, vagy ellenpélda megadásával), hogy az alábbi állítások közül melyek igazak:

- (a) Egy négyzetes mátrixnak pontosan akkor sajátértéke a 0, ha a mátrix determinánsa 0.
- (b) Ha egy *homogén* lineáris egyenletrendszernek kevesebb egyenlete van, mint ahány ismeretlene, akkor végtelen sok megoldása van.

Válaszainkat mindig részletesen indokoljuk!

Jó munkát!