Név:

1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	$\sum$

Beadott lapok száma (ezzel a lappal együtt):

Lineáris algebra gyakorlat

2. ZH 2012. május 7.

ζ csoport

---

1. Feladat. (6 pont)

1. Egy homogén lineáris egyenletrendszer megoldásalterének bázisa nulla elemű. Hány megoldása van az egyenletrendszernek? Válaszát indokolja!
2. Adjon meg egy olyan 2×2-es mátrixot, melynek sajátértéke a 3, és nem tartalmaz nullát!

Megoldás:

1. A nulla elemű bázis azt jelenti, hogy a megoldásaltér nulla-dimenziós, ami azt jelenti, hogy nincs szabadismeretlen. Mivel nincs szabadismeretlen, így végtelen sok megoldás nem lehet, de mivel a csupa nulla vektor mindig megoldás, így 1 darab megoldása van az egyenletrendszernek.
2. Keressük a megoldást $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ alakban. (Az a-n kívüli nemnulla paramétereket véletlen választottam.) Ha a 3 sajátérték, akkor a $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -1 & a-3 \end{vmatrix} = -2a + 6 + 2$ determinánsnak nullának kell lennie. Ebből jön, hogy $a = 4$ esetben a mátrixnak pont sajátértéke a 3.

---

2. Feladat. (5 pont) Határozza meg a következő mátrix inverzét!

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$\begin{pmatrix} -3 & -5 & 7 \\ -3 & -5 & 8 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

---

3. Feladat. (6 pont) Adjon meg egy bázist a következő homogén lineáris egyenletrendszer megoldásalterében!

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Megoldás: Az egyenletrendszer általános megoldása:

$$(x_3 + 2x_4;\ x_3 + 3x_4;\ x_3;\ x_4)\,,\ x_3, x_4 \in \mathbb{R}.$$

Bázis: $(1,1,1,0)\,;\ (2,3,0,1)$

---

4. Feladat. (5 pont) Határozza meg az

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & -3 \end{pmatrix}$$

mátrix sajátértékeit, és adja meg az egyik sajátértékhez tartozó sajátaltér egy bázisát!

Megoldás: $\lambda_1 = -4,\ \lambda_2 = 3.$

$$U_{-4} = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right], \qquad U_3 = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

---

5. Feladat. (6 pont) Oldja meg a következő mátrixegyenletet!

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 1 \\ -4 & 5 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ -15+8a & -3+8b \\ 26-12a & 4-12b \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

---

6. Feladat. (6 pont) Mely p valós számok esetén lesz az

$$A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ p & 0,6 \end{pmatrix}$$

ráfordítási mátrixú gazdaság működőképes? Adjon meg egy olyan árrendszert (árvektort) $p = 0,1$ esetén, mellyel az össztermelést figyelembe véve $+9$ a nyereség és az első termék ára nagyobb a piacon, mint a másodiké!

Megoldás: A pontosan akkor működőképes, ha $0 \le p < \frac{4}{5}$. A lehetséges $v = (a, b)$ árvektorok a következők: $0 < b < 15$, és $a = 30 - b$. Tehát egy példa: $v = (20, 10)$.

---

7. Feladat. (6 pont) Határozza meg a következő mátrix rangját a p paraméter értékétől függően!

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ -3 & p-1 & -7 & 1 \\ 0 & -3 & 2p & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Megoldás:

$$\text{Rang} = \begin{cases} 2, & \text{ha } p = 1, \\ 4, & \text{ha } p \neq 1. \end{cases}$$
