

## TIPPEK BÁZISTRANSZFORMÁCIÓHOZ

**1.** Mi a teendő olyankor, ha egy lineáris egyenletrendszer megoldása során az összes változót „be tudtuk vinni” (összeért a két függőleges vonal), de maradt még  $e$ -s címkéjű sor? Például, ha a következő táblázatok valamelyikéhez jutottunk a bázistranszformáció végén:

|       | $b$ |
|-------|-----|
| $x_1$ | 4   |
| $x_2$ | 8   |
| $x_3$ | 1   |
| $e_4$ | 5   |

**1. példa**

|       | $b$ |
|-------|-----|
| $x_1$ | 7   |
| $x_2$ | 4   |
| $x_3$ | 2   |
| $e_4$ | 0   |

**2. példa**

Az  $e_4$  címkéjű sornak megfelelő 4. egyenlet bal oldalán mindkét példában 0 áll (mert egyik  $x_i$  változó sem szerepel az egyenlőségjel bal oldalán, vagyis tulajdonképpen mindegyik 0 együtthatóval van jelen). Tehát az **1. példában** a 4. sor a  $0 = 5$  egyenletnek felel meg, ami ellentmondó (tehát itt **nincs megoldás**). Hasonlóan, a **2. példában** a 4. sor a  $0 = 0$  egyenletnek felel meg, ami kihúzható, és így az első három sorból megkapjuk, hogy a megoldás:

$$\boxed{x_1 = 7, \quad x_2 = 4, \quad x_3 = 2.}$$

Összefoglalva, ha bázistranszformáció során a két függőleges vonal összeér, akkor az  $e$ -s címkéjű sorokra gondolhatunk úgy, hogy a két függőleges vonal között csupa 0 áll, és innentől a szokott módon a  $b$  oszlopban álló elem vizsgálatával dönthetjük el, hogy egy ilyen sor ellentmondó, vagy kihúzható-e. (Hasonlóan járhatunk el mátrixegyenlet megoldása esetén.)

**2. A rangszámolás** bázistranszformációs feladatoknál (tehát amikor csak azt vizsgáljuk, hogy hány vektort tudunk bevinni a bázisba), a bevitt  $v_i$  vektorok sorait nem szükséges kiszámolni (paraméteres feladatnál sem).

Ennek az az oka, hogy ha egyszer egy  $v_i$  vektort bevittünk a bázisba, akkor az ott is marad, és a  $v_i$  címkéjű sor elemei onnantól már nem befolyásolnak semmit, mivel mindig csak  $e$ -s sorokban keresünk generáloelemet. (Továbbá a válasz megadásához sincs szükség arra, hogy a „végső” táblázatban ismerjük a  $v$ -s sorok elemeit, szemben például az inverzszámítással.)

Ez akkor lehet hasznos, ha nagyon elcsúnyulna a számolás (például paraméteres feladat esetén megjelenő ronda törtekkel). Természetesen az  $e$ -s sorok elemeit mindig ki kell számolni!

Például a 6.2/a feladatban szereplő  $(1, 1, 0)$ ,  $(-1, 2, 1)$ ,  $(0, 3, 1)$ ,  $(2, -1, -1)$  vektorrendszer rangját így is meghatározhatjuk (üresen hagyva azokat a sorokat, melyeket nem muszáj kiszámolni):

$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline e_1 & 1^* & -1 & 0 & 2 \\ e_2 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ e_3 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|ccc} & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & & & \\ e_2 & 3 & 3 & -3 \\ e_3 & 1^* & 1 & -1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c|cc} & v_3 & v_4 \\ \hline v_1 & & \\ e_2 & 0 & 0 \\ v_2 & & \end{array}$$

Elakadtunk; két vektort tudtunk bevinni a bázisba, tehát a vektorrendszer rangja 2.

**3.** Ha elfelejtettük, hogy hogyan kell mátrix-inverzét számolni, de tudunk mátrixegyenletet megoldani, akkor az inverzmátrix definíciója szerint az  $A$  mátrix inverzét meghatározhatjuk úgy is, hogy megoldjuk az  $AX = E$  mátrixegyenletet (ahol  $E$  az  $A$ -val megegyező méretű egységmátrix).

Például a 7.1/b feladatbeli  $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  mátrix inverze pontosan a

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mátrixegyenlet megoldása. (Ha nincs megoldása a mátrixegyenletnek, akkor nincs inverz.)