

ALTEREK

Adva van egy V vektortér (tehát egy halmaz, amelyen olyan összeadás és skalárral való szorzás műveletek vannak definálva, hogy teljesül rájuk a 4. előadásjegyzetben axiómaként megfogalmazott 8 műveleti tulajdonság).

ÁLLÍTÁS. A V vektortér egy U részhalmaza pontosan akkor **altér**, ha rendelkezik a következő három tulajdonsággal:

- (1) **A nullvektor benne van U -ban.**
- (2) **U zárt az összeadásra:** azaz bárhogy veszünk két vektort U -ból, az összegük is mindig U -ban lesz.
- (3) **U zárt a skalárral való szorzásra:** azaz bárhogy választunk egy vektort U -ból, annak az összes skalárszorosa is U -ban lesz.

1. FELADAT. Legyen V a 2×2 -es mátrixok vektortere. (Ebben a vektortérben a műveletek a szokásos mátrixösszeadás és skalárral való szorzás.) Jelölje U a nulla determinánsú 2×2 -es mátrixok halmazát. Döntsük el, hogy U alteret alkot-e V -ben!

MEGOLDÁS. Nem. Ugyanis U nem zárt az összeadásra: például noha az $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ és $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mátrixok U -ban vannak (hiszen a determinánsuk 0), az összegük, a $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ mátrix már nincs U -ban (hiszen annak nem nulla a determinánsa, hanem 2). □

2. FELADAT. Jelölje U azon $\mathbb{R}^3$ -beli vektorok halmazát, melyeknek mindhárom koordinátája nemnegatív. Alteret alkot-e U az $\mathbb{R}^3$ vektortérben?

MEGOLDÁS. Nem. Ugyanis U nem zárt a skalárral való szorzásra: például az $(1, 2, 3)$ vektor benne van U -ban (hiszen mindhárom koordinátája ≥ 0), azonban e vektor (-2) -szerese, a $(-2, -4, -6)$ vektor már nincs benne U -ban (mert vannak negatív koordinátái). □

3. FELADAT. Az $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ halmaz alteret alkot-e az $\mathbb{R}^3$ vektortérben? (Szavakkal megfogalmazva, U azokat az $\mathbb{R}^3$ -beli vektorokat tartalmazza, melyekben a koordináták összege 0.)

MEGOLDÁS. Igen. Megmutatjuk, hogy U teljesíti a fenti (1)–(3) tulajdonságokat, tehát altér:

- A $(0, 0, 0)$ nullvektor benne van U -ban, hiszen koordinátáinak összege $0 + 0 + 0 = 0$.
- U zárt az összeadásra, mert bárhogy veszünk két tetszőleges U -beli vektort (azaz két olyan számhármast, hogy mindkettőben 0 a koordináták összege), a két vektor összegében is 0 lesz a koordináták összege, vagyis a két vektor összege is U -ban lesz mindig. Hiszen

ha az (a, b, c) vektor „koordinátaösszege” $a + b + c = 0$

és a (p, q, r) vektor „koordinátaösszege” $p + q + r = 0$,

akkor az $(a + p, b + q, c + r)$ vektor „koordinátaösszege” $a + p + b + q + c + r = 0 + 0 = 0$.

- U zárt a skalárral való szorzásra is: Most azt kell végiggondolni, hogy ha egy vektor U -ban van, tehát a koordinátái összege 0, akkor a vektor λ -szorosában is 0 lesz a koordináták a összege (vagyis a vektor λ -szorosa is U -ban lesz), *bármilyen* λ valós számmal (skalárral) is szorzunk. Ez pedig azon múlik, hogy ha egy vektort λ -val szorzunk, akkor a koordináták összege is λ -szorozódik, valamint hogy $\lambda \cdot 0 = 0$:

ha az (a, b, c) vektor „koordinátaösszege” $a + b + c = 0$,

akkor a $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ vektor „koordinátaösszege” $\lambda a + \lambda b + \lambda c = \lambda(a + b + c) = \lambda \cdot 0 = 0$,

és ez igaz **minden** λ valós számra. □

Homogén lineáris egyenletrendszerek és $\mathbb{R}^n$ alterei

DEFINÍCIÓ. Azt mondjuk, hogy egy lineáris egyenletrendszer *homogén*, ha a jobb oldalon szereplő konstans tag mindegyik egyenletben 0. (Tehát ha az egyenletrendszer mátrixos alakjában a függőleges vonal jobb oldalán csak nullák állnak.)

Például az

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

egyenletrendszer egy négyváltozós homogén lineáris egyenletrendszer.

ÁLLÍTÁS. Minden n -változós homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza alteret alkot $\mathbb{R}^n$ -ben. (A megoldásokra vektor alakban tekintünk.)

1. PÉLDA. A fenti egyenletrendszer megoldáshalmaza alteret alkot $\mathbb{R}^4$ -ben.
2. PÉLDA. Az állításból azonnal következik, hogy a 3. feladatban szereplő U halmaz altér $\mathbb{R}^3$ -ban, hiszen U nem más, mint az egyetlen $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ egyenletből álló (háromváltozós) homogén lineáris egyenletrendszer megoldáshalmaza.

MEGJEGYZÉS. Valójában másfajta altér nincs is $\mathbb{R}^n$ -ben: Minden $\mathbb{R}^n$ -beli U altérhez található olyan n -változós homogén lineáris egyenletrendszer, melynek a megoldáshalmaza éppen az U halmaz. (Mivel ugyanazt a halmazt többféleképpen is meg lehet adni, előfordulhat, hogy U definíciójából nem „olvasható le” rögtön a megfelelő homogén lineáris egyenletrendszer.)

Koordinátageometria és $\mathbb{R}^3$ alterei

Az $\mathbb{R}^3$ vektortér vektoraira gondolhatunk úgy is, mint a tér pontjaira (ha a pontokat azonosítjuk a helyvektorukkal). Ebben a szemléletben például az alterek definíciójában szereplő (3)-as tulajdonság úgy is megfogalmazható, hogy ha egy (origótól különböző) pont benne van az altérben, akkor a pontot az origóval összekötő egyenes minden pontja is benne van az altérben.

ÁLLÍTÁS. Az $\mathbb{R}^3$ vektortér alterei pontosan a következő pontthalmazok:

- az origó (azaz a nullvektor mint egyelemű halmaz),
- az origón átmenő egyenesek,
- az origón átmenő síkok,
- maga az egész $\mathbb{R}^3$ tér.

MEGJEGYZÉS. Analóg állítás igaz az $\mathbb{R}^2$ vektortérben is (a síkon): Itt az alterek az origó; az origón átmenő egyenesek; valamint maga az egész sík.

PÉLDÁK. A 2. feladatban szereplő U halmaz egy „térnyolcad” (a koordinátatengelyek által kifeszített három sík 8 részre osztja a teret, ezek egyike az U), tehát U nem az előző állításban felsorolt pontthalmazok közül való, így nem altér.

A 3. feladatban az $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ egyenlet éppen az $(1, 1, 1)$ normálvektorú, origón átmenő sík egyenlete, vagyis az ebben a feladatban szereplő U pontthalmaz az előző állítás szerint altér (mert egy origón átmenő sík).