2. FELADATSOR

1.$^-$ Hányféleképpen állíthatjuk sorba $\{1, 2, \ldots, 6\}$ elemeit úgy, hogy ne a 2-es számmal kezdjük a sort? [4.3]

2.$^-$ Hányféleképpen lehet n bástyát elhelyezni az $n \times n$-es sakktáblán úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást?

3.$^-$ Hányféleképpen ülhet le egy kör alakú asztalhoz hét ember? (Két ülésmódot nem tekintünk különbözőnek, ha mindenkinek ugyanaz a két szomszédja.) [4.29]

4.$^-$ Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt. A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnevűek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé?

5. Hányféleképpen állhat be n vásárló egy bolt k pénztárához fizetni? [TK. 3.4.8.]

6. Hányféleképpen lehet a MATEMATIKA szó betűit leírni úgy, hogy a kialakult szóban az *első* M betű a 6. helyen álljon? (Például egy ilyen szó az AKIETMAAMT.)

7. Hányféleképpen lehet leírni a MISSISSIPPI szó betűit úgy, hogy a négy S betű ne kerüljön egymás mellé? [4.13]

8. Hányféleképpen lehet leírni a KOMBINATORIKA szó betűit úgy, hogy a B és M betűk ne kerüljenek egymás mellé?

9. n különböző pár zoknit rakunk be egy mosógépbe. A mosás után a zoknikat egyesével húzzuk ki a mosógépből. Hányféle kihúzási sorrend esetén lesz az i-edik kihúzott zokni az, amelyik az első párt fejezi be? [4.22]

10. Hány nullára végződik a $((3!)!)!$ szám? [4.6]

11. Bizonyítsuk be az $(n!)^{n+1} | (n^2)!$ oszthatóságot, lehetőleg kombinatorikus úton. [4.8]

12. Legyen $p_n(k)$ egy n elemű halmaz pontosan k fixponttal rendelkező permutációinak száma. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!$. [4.11]

13.$^+$ Bizonyítsuk be Wilson tételét, mely szerint tetszőleges p prímszámra $p | (p-1)! + 1$. *Segítség:* Számoljuk meg, hogy egy szabályos p-szög csúcsai között hány körút tervezhető úgy, hogy minden csúcson pontosan egyszer megyünk keresztül, ha az elforgatással egymásba vihető körutakat nem különböztetjük meg. [4.31]

14.$^-$ Írjuk fel az $(x+y+z)^3$ polinom „kifejtett alakját" (a zárójelek felbontása után).

15.$^-$ a) Mennyi az $x^{10}y^{70}z^{20}$ monom együtthatója az $(x+y+z)^{100}$ polinomban?
b) És az $x^{10}y^{20}z^{30}$ monomé?

16.$^-$ Tekintsük az alábbi $\pi\colon [8] \to [8]$ permutációt:

$$\pi(1) = 4,\ \pi(2) = 1,\ \pi(3) = 3,\ \pi(4) = 6,\ \pi(5) = 8,\ \pi(6) = 2,\ \pi(7) = 5,\ \pi(8) = 7.$$

(Természetesen π-re gondolhatunk a `41368257` sorbaállításként is.) Határozzuk meg π ciklusainak számát!

17.$^+$ Egy börtönben 100 rab raboskodik. A gonosz börtönigazgató a következőt hirdeti ki a raboknak: „Egy óra múlva minden rab homlokára felírok egy valós számot; ezek között nem lesz két egyforma. Mindenki látja majd a többiek számait, de a sajátját nem. Ezután kaptok egy kis gondolkodási időt, és mindenkinek választania kell egy piros vagy kék sapkát. Persze egymás választásait nem láthatjátok, és kommunikálni tilos a játék alatt. Utána a homlokotokra írt számok nagyság szerinti sorrendje szerint felsorakoztatlak bennetek, és ha két szomszédos emberen azonos színű sapkát látok, akkor mindenkinek meghosszabbodik a büntetése 5 évvel." Milyen stratégiát találjanak ki a rabok a hátralévő egy órában, ha el akarják kerülni a büntetést?

18. Véletlenül választunk egy permutációt S_n-ből. Mi annak a valószínűsége, hogy az 1 elemet tartalmazó ciklus hossza k?

19. Véletlenül választunk egy permutációt S_n-ből. Mi annak a valószínűsége, hogy az 1 és 2 elemek ugyanabban a ciklusban lesznek?

20. Hány olyan permutációja van $[n]$-nek, amelyben minden ciklus hossza 2?

21. Hány olyan permutációja van $[n]$-nek, amelyben minden ciklus hossza páros?

22. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben ugyanannyi páros sok ciklust tartalmazó permutáció van, mint páratlan sok ciklust tartalmazó!

23.$^+$ Egy városban csak két család közötti lakáscserét lehet elvégezni (több családot érintő lakáscsere tilos), és egy család egy nap csak egyszer költözhet. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges lakáscsere elvégezhető két nap alatt. [4.44]

24.$^-$ Egy osztály 30 tanulója közül a matematikát 12-en, a fizikát 14-en, a kémiát pedig 13-an szeretik. Öt tanuló a matematikát és a fizikát is, hét a fizikát és a kémiát is, négy a matematikát és a kémiát is szereti; hárman vannak, akik mindhárom tárgyat szeretik. Hányan vannak, akik nem szeretik egyiket sem a három tárgy közül? [7.1]

25.$^-$ Egy választás előtti közvélemény-kutatás bejelenti, hogy arra az eredményre jutott, hogy az A, B, illetve C párttal a megkérdezettek rendre 65%, 57%, illetve 58%-a szimpatizál. Továbbá, 28% számára szimpatikus mind A, mind B, 30% számára szimpatikus mind A, mind C, és 27% számára szimpatikus mind B, mind C. Végül a megkérdezettek 12%-a mindhárom párttal szimpatizál. Mi a véleményünk erről a bejelentésről?

26. Hány olyan sorbaállítása van az angol ábécé 26 betűjének, mely egymás utáni három betűként a LOM, HOZ és ZAB szavak egyikét sem tartalmazza?

27. Hányféleképpen jelölhetünk ki egy konvex, n oldalú sokszög csúcsai közül hármat úgy, hogy semelyik kettő se legyen szomszédos? [7.9]

28. Hányféleképpen lehet a 3×3-as négyzet kilenc mezőjét pirosra és kékre színezni úgy, hogy semelyik 2×2-es résznégyzet (a sarkoknál) ne legyen teljesen piros? *(A mezők meg vannak különböztetve, például meg vannak számozva 1-től 9-ig.)*

29. Hány olyan n-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amelynek minden prímosztója legalább kétjegyű? [7.7]

30. Legyen $\phi(n)$ az n-nél nem nagyobb, n-hez relatív prím pozitív egészek száma. Mutassuk meg, hogy ha n prímtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, akkor

$$\phi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \qquad [7.5]$$

31. Hányféleképpen lehet 10 lapot kiválasztani az 52 lapos franciakártya-csomagból úgy, hogy a kiválasztott lapok között mind a négy szín előforduljon?

32. (Elcserélt levelek problémája.) Valaki n levelet ír, és megcímezi a hozzájuk tartozó n borítékot, majd a leveleket véletlenszerűen a borítékokba teszi.
a) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy egyik levél sem a saját borítékjába kerül?
b) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy pontosan k levél kerül a saját borítékjába?

33. Hány olyan tízjegyű telefonszám van, amelyben mindegyik páratlan számjegy előfordul legalább egyszer? (A telefonszámokra nincs semmilyen megkötés, például a 0000000000 is egy telefonszám.)

34. Egy pékség négyféle zsemlét árul: mákosat, szezámmagosat, bajort és normált. Az egyes fajtákból rendre 3, 4, 5 és 6 darab van a boltban. 12 zsemlét szeretnénk venni. Hányféleképpen állíthatjuk össze a rendelést?

35. Jelölje $\left\{ n \atop k \right\}$ azt a számot, hogy egy n elemű halmazt hányféleképpen lehet k darab (nemüres) halmazra partícionálni. (Például $\left\{ 3 \atop 2 \right\} = 3$, mert az $\{1, 2, 3\}$ halmaznak 3 db 2 osztályból álló partícionálása van: $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$ és $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$.) Bizonyítsuk be, hogy

$$\left\{ n \atop k \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

Megjegyzés: Az $\left\{ n \atop k \right\}$ számokat *másodfajú Stirling-számoknak* nevezzük.

36. Egy gálavacsorán n házaspár vesz részt. Mind a $2n$ jelenlévő egy pohárköszöntőt mond az este folyamán. Hányféle sorrendben lehet megtartani a pohárköszöntőket úgy, hogy semelyik házaspár két tagja ne következzen (közvetlenül) egymás után?

37. Hányféleképpen lehet egy n elemű halmazt k darab különböző, m elemű részhalmazával lefedni? [7.8]

38.$^+$ Hány olyan $\pi : [n] \to [n]$ permutáció van, amelyre $\pi(i + 1) - \pi(i) \neq 1$ teljesül minden i-re $(1 \leq i \leq n - 1)$?

39.$^+$ Hányféleképpen ülhet le n házaspár egy kör alakú asztal mellé úgy, hogy a férfiak és nők felváltva üljenek, de senki se üljön a házastársa mellett? (A székek meg vannak számozva.)

40. Bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq n < k; \\ n!, & \text{ha } n = k. \end{cases} \qquad [7.13]$$

41. Bizonyítsuk be, hogy $m, n \geq 1$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{m-k}{n-k} = 0. \qquad [7.15]$$

42. Bizonyítsuk be, hogy $m, n \geq 1$ esetén

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{m+n-k-1}{n-k} = 0. \qquad [7.16]$$

43. Hányféleképpen lehet lefedni egy $2 \times n$-es téglalapot dominókkal (1×2-es téglalapokkal)?

44. Egy építőjátékunk van, amely piros és kék téglákat tartalmaz. Hányféleképpen lehet ilyen téglákból n magas tornyot építeni, ha nem engedjük meg, hogy két piros tégla szomszédos szintre kerüljön? (A téglák a színektől eltekintve egyformák. Minden szintre egy tégla kerül.)

45. n forintunk van. Minden nap pontosan egy dolgot veszünk a következők közül (zárójelben az egységár): perec (1 forint), fagylalt (2 forint), csoki (2 forint). Hányféleképpen költhetjük el a pénzünket?

46. Legyen s_n azoknak az n jegyű, csak $0, 1, 2$ számjegyeket tartalmazó számoknak a száma, amelyekben bármely két szomszédos számjegy legfeljebb 1-gyel tér el egymástól. Igazoljuk, hogy $n \geq 3$-ra $s_n = 2s_{n-1} + s_{n-2}$. [6.20]

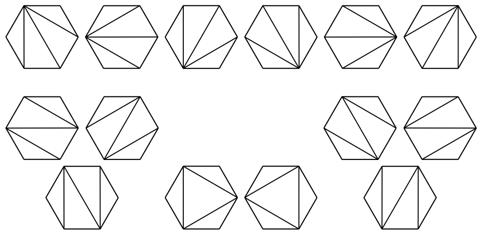
47. Oldjuk meg a következő lineáris rekurziókat.

a) $a_0 = 1,\ a_1 = 6; \quad a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
b) $a_0 = 3,\ a_1 = 6; \quad a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
c) $a_0 = 1,\ a_1 = 2; \quad a_n = 6a_{n-1} - 7a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
d) $a_0 = 1,\ a_1 = 1; \quad a_n = 4a_{n-1} - 2a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
e) $a_0 = 6,\ a_1 = 8; \quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
f) $a_0 = 3,\ a_1 = -3; \quad a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
g) $a_0 = 1,\ a_1 = 1; \quad a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
h) $a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 13; \quad a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3}$ (ha $n \geq 3$).
i) $a_0 = 17,\ a_1 = 14,\ a_2 = 110; \quad a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$ (ha $n \geq 3$).

48.$^+$ Oldjuk meg a következő rekurziót:

$$a_0 = a_1 = 1; \quad a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 3n + 2^n \text{ (ha } n \geq 2).$$

49. Hányféleképpen lehet egy konvex $(n+2)$-szöget egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontani?



50. A $2n$ hosszú Dyck-út egy olyan origóból induló út, amely n darab $\nearrow$ és n darab $\searrow$ lépésből áll (tehát az x-tengelyen végződik), és (A megengedett $\nearrow$ és $\searrow$ lépések rendre a $(1,1)$ és $(1,-1)$ lépések.) Hány darab $2n$ hosszú Dyck-út van?

51. Egy kör alakú asztal körül $2n$-en ülnek. Hányféleképpen alkothatnak az asztal körül ülők n párt úgy, hogy az egy párban lévők kezet foghassanak anélkül, hogy egy másik kezet fogó pár keze alatt vagy felett át kellene nyúlniuk? (Az asztal felett való átnyúlás megengedett.)

Lineáris rekurzió megoldása Wolfram Alphával:
A 64/b. feladat megoldása: `solve a(0)=3, a(1)=6, a(n)=a(n-1)+6a(n-2)`

Kilenc kidolgozott lineáris rekurzió megoldás Hajnal Péter honlapján:
http://www.math.u-szeged.hu/~hajnal/courses/BSc_Kombinatorika/lin_alap.htm