

1. ZÁRTHELYI DOLGOZAT

Minden feladat 4 pontot ér. Válaszainkat mindig részletesen indokoljuk!

1. Hányféleképpen állítható sorba Anna, Anita, Alfonz, Béla, Bea, Bori, Cecília, Cintia, Cézár, Dénes, Dezső és Dóra úgy, hogy az azonos kezdőbetűs nevek egymás mellé kerüljenek? (Például egy jó sorbaállítás: Dóra, Dénes, Dezső, Anita, Alfonz, Anna, Cézár, Cintia, Cecília, Bori, Béla, Bea.)

2. Tizenhét doboz mindegyikében piros, kék, sárga és zöld golyók vannak. Bizonyítsuk be, hogy található két olyan doboz, amelyekben együttvéve (a két doboz tartalmát képzeletben összeöntve) mind a négyféle színű golyóból páros sok van.

Segítség: Mindegyik dobozra írjuk rá, hogy az egyes színekből páros vagy páratlan sok van a dobozban. Utána skatulyaelvvel érvelhetünk.

3. Oldjuk meg a következő lineáris rekurziót:

$$a_0 = 5$$

$$a_1 = 4$$

$$a_n = 3a_{n-1} + 10a_{n-2}, \quad \text{ha } n \geq 2.$$

4. Egy számítógépes rendszerben 8 karakterből álló jelszavakat kell megadni az angol ábécé kisbetűiből (**a-z**, ez 26 darab karakter), az angol ábécé nagybetűiből (**A-Z**, ez újabb 26 karakter) és számjegyekből (**0-9**, ez 10 darab karakter) választva a karaktereket. (Egy karaktert többször is használhatunk.) Biztonsági okokból egy jelszótól megkövetelik, hogy tartalmazzon kisbetűt, nagybetűt és számjegyet is. Hány korrekt jelszó van?

Segítség: Logikai szitával érdemes dolgozni.

5. Hány különböző 4×4 -es részmátrixa van a következő mátrixnak?

$$\begin{pmatrix} 11 & 11 & 11 & 11 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 13 & 13 & 13 \\ 21 & 21 & 21 & 21 & 22 & 22 & 22 & 22 & 23 & 23 & 23 & 23 \\ 31 & 31 & 31 & 31 & 32 & 32 & 32 & 32 & 33 & 33 & 33 & 33 \\ 41 & 41 & 41 & 41 & 42 & 42 & 42 & 42 & 43 & 43 & 43 & 43 \\ 51 & 51 & 51 & 51 & 52 & 52 & 52 & 52 & 53 & 53 & 53 & 53 \\ 61 & 61 & 61 & 61 & 62 & 62 & 62 & 62 & 63 & 63 & 63 & 63 \\ 71 & 71 & 71 & 71 & 72 & 72 & 72 & 72 & 73 & 73 & 73 & 73 \\ 81 & 81 & 81 & 81 & 82 & 82 & 82 & 82 & 83 & 83 & 83 & 83 \end{pmatrix}.$$

Jó munkát!