1. Hányféleképpen állítható sorba Anna, Anita, Alfonz, Béla, Bea, Bori, Cecília, Cintia, Cézár, Dénes, Dezső és Dóra úgy, hogy az azonos kezdőbetűs nevűek egymás mellé kerüljenek? (Például egy jó sorbaállítás: $\underbrace{\text{Dóra, Dénes, Dezső,}}_{D}$ $\underbrace{\text{Anita, Alfonz, Anna,}}_{A}$ $\underbrace{\text{Cézár, Cintia, Cecília,}}_{C}$ $\underbrace{\text{Bori, Béla, Bea.}}_{B}$)

Ez az "A betűsök blokkját" szimbolizálja, stb.

Megoldás: Úgy kapunk jó sorbaállítást, ha az A, B, C, D szimbólumokat tetszőlegesen sorbaállítjuk (1), majd az A helyére beírjuk Anna, Anita, Alfonz tetszőleges sorbaállítását, a B helyére Béla, Bea, Bori tetszőleges sorbaállítását, és így tovább (2). (Ezzel minden jó sorbaállítást pontosan egyszer állítunk elő.)

Erre $\boxed{4!\cdot(3!)^4}$ lehetőségünk van. □

(1): A 4 blokk (szimbólum) tetszőleges sorbaállítása

(2): Majd mind a 4 blokkra meghatározzuk, hogy ott milyen sorrendben áll az olyan kezdőbetűs három személy; ez mind a 4 blokkra 3! db független lehetőség.

2. Tizenhét doboz mindegyikében piros, kék, sárga és zöld golyók vannak. Bizonyítsuk be, hogy található két olyan doboz, amelyekben együttvéve (a két doboz tartalmát képzeletben összeöntve) mind a négyféle színű golyóból páros sok van.

Megoldás: Mindegyik dobozra írjunk rá egy (p, k, s, z) négyest, ahol p, k, s, z rendre a dobozban lévő piros, kék, sárga és zöld golyók számának paritása. Az 1. doboz kaphat például (páros, páros, páratlan, páros). Összesen $2^4=16$-féle megegyezett dobozfelirat van, hiszen minden komponens 2-féle lehet. Mivel 17 (>16) doboz van, ezért a skatulyaelv szerint biztosan van két olyan doboz, amelyeknek megegyezik a felirata. Ez a két doboz megfelelő lesz, hiszen bennük együttesen mindegyik színű golyóból páros sok van. (Mind a 4 színre megegyezik a golyók számának paritása a két dobozban, és "páros + páros = páros", "páratlan + páratlan = páros")

3. Oldjuk meg a következő lineáris rekurziót:

Mo: (Vázlat.)

$$a_0 = 5$$
$$a_1 = 4$$
$$a_n = 3a_{n-1} + 10a_{n-2}, \quad \text{ha } n \geq 2. \iff a_n - 3a_{n-1} - 10a_{n-2} = 0 \quad (n \geq 2)$$

$$A(x) = a_0 + a_1x + \cancel{a_2x^2} + \cancel{a_3x^3} + \cancel{a_4x^4} + \dots$$
$$-3xA(x) = -3a_0x \cancel{- 3a_1x^2} \cancel{- 3a_2x^3} \cancel{- 3a_3x^4} - \dots$$
$$(+)\quad -10x^2A(x) = \cancel{-10a_0x^2} \cancel{- 10a_1x^3} \cancel{- 10a_2x^4} - \dots$$
$$(1-3x-10x^2)A(x) = 5 - 11x$$
$$\Downarrow$$

$$A(x)=\frac{5-11x}{1-3x-10x^2}=\frac{5-11x}{(1-5x)(1+2x)}=2\cdot\frac{1}{1-5x}+3\cdot\frac{1}{1+2x}=\circledast$$

nevező szorzattá alakítása...

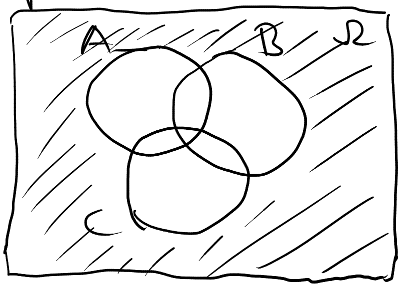
parc. törtekre bontás...

$$\left[\ \frac{1}{1-\boxed{5x}}=\sum_{n=0}^{\infty}(5x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}5^nx^n\ ,\quad \frac{1}{1+2x}=\frac{1}{1-\boxed{(-2x)}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-2x)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^nx^n.\ \right]$$

$$\circledast=2\cdot\sum_{n=0}^{\infty}5^nx^n+3\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\underbrace{\left(2\cdot5^n+3\cdot(-2)^n\right)}_{\boxed{a_n=2\cdot5^n+3\cdot(-2)^n}}x^n$$

4. Egy számítógépes rendszerben 8 karakterből álló jelszavakat kell megadni az angol ábécé kisbetűiből (**a-z**, ez 26 darab karakter), az angol ábécé nagybetűiből (**A-Z**, ez újabb 26 karakter) és számjegyekből (**0-9**, ez 10 darab karakter) választva a karaktereket. (Egy karaktert többször is használhatunk.) Biztonsági okokból egy jelszótól megköveteli, hogy tartalmazzon kisbetűt, nagybetűt és számjegyet is. Hány korrekt jelszó van?

Megoldás:



Legyen Ω a 8 karakterből álló (rossz is jöhető) jelszavak halmaza. $|\Omega|=62^8$

mind a 8 karakter $26+26+10=62$-féle lehet.

A: Azon Ω-beli jelszavak halmaza, amelyekben nincs kisbetű.

B: —"— , nincs nagybetű.

C: —"— , nincs számjegy.

Kell: $|\overline{A\cup B\cup C}|=|\Omega|-|A|-|B|-|C|+|A\cap B|+|A\cap C|+|B\cap C|-|A\cap B\cap C|$

36^8, mert mind a 8 karakter 36-féle lehet (nagybetű vagy szám)

10^8, mert mind a 8 karakter 10-féle lehet (számjegy)

...

0

(többi tag hasonlóan)

$$=\boxed{62^8-36^8-36^8-52^8+10^8+26^8+26^8-0}$$

5. Hány különböző 4×4-es részmátrixa van a következő mátrixnak?

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccccccccccc} & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & \end{array} \quad O \\
\begin{array}{c} \\ \rightarrow \\ \\ \\ S \ \rightarrow \\ \\ \rightarrow \\ \rightarrow \end{array} &
\begin{pmatrix}
11 & 11 & 11 & 11 & 12 & 12 & 12 & 12 & 13 & 13 & 13 & 13 \\
21 & \boxed{21} & 21 & 21 & \boxed{22} & 22 & \boxed{22} & 22 & 23 & 23 & \boxed{23} & 23 \\
31 & 31 & 31 & 31 & 32 & 32 & 32 & 32 & 33 & 33 & 33 & 33 \\
41 & 41 & 41 & 41 & 42 & 42 & 42 & 42 & 43 & 43 & 43 & 43 \\
51 & \boxed{51} & 51 & 51 & \boxed{52} & 52 & \boxed{52} & 52 & 53 & 53 & \boxed{53} & 53 \\
61 & 61 & 61 & 61 & 62 & 62 & 62 & 62 & 63 & 63 & 63 & 63 \\
71 & \boxed{71} & 71 & 71 & \boxed{72} & 72 & \boxed{72} & 72 & 73 & 73 & \boxed{73} & 73 \\
81 & \boxed{81} & 81 & 81 & \boxed{82} & 82 & \boxed{82} & 82 & 83 & 83 & \boxed{83} & 83
\end{pmatrix}.
\end{array}$$

S: kiválasztott sorok (sorindexek) halmaza.

O: kiválasztott oszlopok (oszlopindexek) halmaza

Megoldás: Egy részmátrixot 4 tetszőleges sor és 4 tetszőleges oszlop megadásával jelölhetünk ki. (Ha a mtx minden eleme különböző lenne, akkor ezért $\binom{8}{4}\cdot\binom{12}{4}$ lenne a válasz.)

Mivel a mtx i-edik sorában az elemek 1. számjegye i, ezért ha két olyan részmátrixot tekintünk, amelyekhez különböző S (sorindex) halmazok tartoznak, akkor ezek a részmátrixok különbözők.

Tehát az S sorhalmaz szerint osztályozva a részmátrixokat, egybeeső részmátrixok csak egy osztályon belül lehetnek. Így azt kell megszámolnunk, hogy egy rögzített S sorkiválasztásra hány különböző részmátrixot kapunk, ha tekintjük az összes lehetséges O oszlopkiválasztást. Mivel az eredeti mtx $\overbrace{\text{1–4. oszlopai}}^{\text{1. blokk}}$, az $\overbrace{\text{5–8. oszlopai}}^{\text{2. blokk}}$ és a $\overbrace{\text{9–12. oszlopai}}^{\text{3. blokk}}$ egybeesnek, ezért az S által kijelölt 4x12-es mátrixra is teljesül ez, de ezen túl további oszlopegyezés nincs (az 1. „blokkban" minden elem utolsó számjegye 1, a 2.-ban 2, a 3.-ban 3). A részmátrixot egyértelműen meghatározza, hogy az egyes blokkokból hány oszlopot választott ki O.

Legyen x_i az i-edik blokkból kiválasztott oszlopok száma.

Tudjuk, hogy $x_1+x_2+x_3=4$, hiszen 4 oszlopot választunk ki, és további megkötés nincs (mindegyik x_i tetszőleges term. szám lehet, mert mind a 3 blokk elég nagy, bármelyik x_i lehet 4 is).

Az ilyen $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{N}^3$ számhármasok száma $\left(\!\binom{3}{4}\!\right)=\binom{6}{2}$.

Könnyű meggondolni, hogy rögzített S-re a különböző részmátrixok és a fenti tulajdonságú (x_1,x_2,x_3) hármasok között bijektív kapcsolat van, így $\forall$ rögzített S-re $\left(\!\binom{3}{4}\!\right)$ darab különböző (S sorhalmazú) részmátrix van. Mivel a korábbiak szerint különböző S halmazokhoz különböző részmátrixok tartoznak, ezért összesen

$$\binom{8}{4}\cdot\left(\!\binom{3}{4}\!\right) = \binom{8}{4}\binom{6}{2} = \underline{\underline{1050}} \text{ kül. részmátrix van. } \square$$