1. ZÁRTHELYI DOLGOZAT

Minden feladat 4 pontot ér. Válaszainkat mindig részletesen indokoljuk!

1. Hány olyan részhalmaza van az $\{1, 2, 3, \ldots, 999\}$ halmaznak, amely pontosan 5 db egyjegyű, pontosan 50 db kétjegyű számot tartalmaz (és akármennyi háromjegyűt)?

2. Hányféleképpen lehet leírni a KOMBINATORIKA szó betűit úgy, hogy a B és M betűk ne kerüljenek egymás mellé?

Segítség: BM, MB.

3. Hányféle sorrendben ülhet le 10 fiú és 5 lány egymás mellé egy padra úgy, hogy (semelyik) két lány nem ül egymás mellett? (Mind a 15 gyereket megkülönböztetjük.)

Segítség: Ha nem különböztetnénk meg az azonos nemű gyerekeket, akkor olyan feladatot kapnánk, amelyet megoldottunk gyakorlaton lottós megfogalmazásban.

4. Egy $3{\times}3$-as négyzetnek elhagyjuk a középső mezőjét. A kapott nyolc mezőt hányféleképpen lehet pirosra, kékre és zöldre színezni úgy, hogy semelyik $1{\times}3$-as résztéglalap ne legyen egyszínű? (Tehát se a felső sor, se az alsó sor, se az első oszlop, se az utolsó oszlop három mezője ne legyen ugyanolyan színű.)

5. Van otthon 3 db Mars, 4 db Snickers, 5 db Milky way és 6 db Sport szelet csokink. (Az azonos fajta csokik egyformák, és más csoki nincs otthon.) Három gyermekünk, András, Bea és Cili indul iskolába. Mindhármójuk hátizsákjába rejtünk néhány csokit az otthoni készletből (és otthon is maradhat csoki). Hányféle csokiosztás lehetséges, ha az is előfordulhat, hogy valaki nem kap semmit (akár mindhárman), és az is, ha egyiküknek adjuk az összes meglévő csokit?

Segítség: Az otthon maradt csokikra gondolhatunk úgy, hogy azokat egy virtuális 4. gyereknek adjuk. (És így a meglévő csokikészletet 4 gyerek között kell SZÉTosztani.)

6.$^+$ Bizonyítsuk be, hogy $\sum c_1 \ldots c_k = \binom{n+k-1}{2k-1}$, ahol az összegezés az összes olyan nemnegatív egészekből álló $\{c_i\}_{i=1}^k$ sorozaton fut végig, amelyre $c_1 + \cdots + c_k = n$.

Jó munkát!