1. Hány olyan részhalmaza van az $\{1, 2, 3, \ldots, 999\}$ halmaznak, amely pontosan 5 db egyjegyű, pontosan 50 db kétjegyű számot tartalmaz (és akármennyi háromjegyűt)?

M.o.: Az $\{1, 2, \ldots, 9\}$ halmazból 5 számot kell kiválasztani, ← $\binom{9}{5}$ lehetőség
a $\{10, 11, \ldots, 99\}$ halmazból 50 számot kell kiválasztani, ← $\binom{90}{50}$ lehetőség
a $\{100, \ldots, 999\}$ halmazból bármennyi számot beválaszthatunk (e halmaz egy tetszőleges részhalmazát kijelölhetjük) ← 2^{900} lehetőség

Az előírt tulajdonságú részhalmaz megadására összesen tehát
$\binom{9}{5} \cdot \binom{90}{50} \cdot 2^{900}$ lehetőség van.

2. Hányféleképpen lehet leírni a KOMBINATORIKA szó betűit úgy, hogy a B és M betűk ne kerüljenek egymás mellé?

A KOMBINATORIKA szó betűinek összesen $\frac{13!}{2!2!2!2!}$ sorbaállítása van ($\{K, K, O, O, M, B, I, I, N, A, A, T, R\}_{multi}$ multihalmaz sorbaállításai száma)

A rossz sorbaállítások száma:

1. típus: ...BM... megjelenik.
Ekkor $\boxed{BM}$-et egy betűnek tekintve $\frac{12!}{2!2!2!2!}$ sorbaállítás adódik.

2. típus: ...MB... megjelenik.
Ezek száma analóg módon $\frac{12!}{2!2!2!2!}$

A válasz tehát $\boxed{\frac{13!}{2!2!2!2!} - 2 \cdot \frac{12!}{2!2!2!2!}}$.

3. Hányféle sorrendben ülhet le 10 fiú és 5 lány egymás mellé egy padra úgy, hogy (semelyik) két lány nem ül egymás mellett? (Mind a 15 gyereket megkülönböztetjük.)

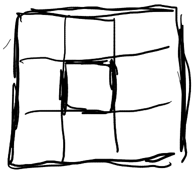
Először ültessük le a 10 fiút tetszőleges sorrendben (ez 10! lehetőség), majd a 6 lányt szúrjuk be valamilyen sorrendben, ahol $\downarrow$-akkal jelöljük a lehetséges beszúrási pozíciókat (egy $\downarrow$-lel jelölt helyre max 1 lány szúrható be!)

$\downarrow F_1 \downarrow F_2 \downarrow F_3 \downarrow F_4 \downarrow F_5 \downarrow F_6 \downarrow F_7 \downarrow F_8 \downarrow F_9 \downarrow F_{10} \downarrow$

A lányok beültetésére (minden fiúsorrend esetén) $\binom{11}{5}\cdot 5!$ lehetőség van, hiszen $\binom{11}{5}$-féleképpen lehet kijelölni a lányok pozícióit [11 db 1-ből választunk 5-öt], majd a kijelölt pozíciókba $5!$-féle sorrendben tudjuk elhelyezni a lányokat.

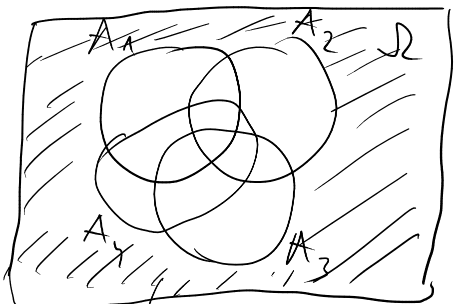
Ez összesen $\boxed{\binom{11}{5}\,10!\,5!}$ lehetséges ültetés. □

4. Egy 3×3-as négyzetnek elhagyjuk a középső mezőjét. A kapott nyolc mezőt hányféleképpen lehet pirosra, kékre és zöldre színezni úgy, hogy semelyik 1×3-as résztéglalap ne legyen egyszínű? (Tehát se a felső sor, se az alsó sor, se az első oszlop, se az utolsó oszlop három mezője ne legyen ugyanolyan színű.)



Az összes színezések száma 3^8, mert a 8 mező mindegyike 3-féle színt kaphat.

Logikai szitával dolgozunk:



Ω: Összes lehetséges színezések, $|\Omega| = 3^8$

A_1: Azon színezések halmaza, amelyekben a felső sor egyszínű.

A_2: — " — alsó sor egyszínű

A_3: — " — első oszlop egyszínű.

A_4: — " — 3. oszlop egyszínű.

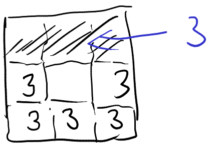
Kell: $|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}| = |\Omega| - |A_1| - |A_2| - |A_3| - |A_4| +$

$+ |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4|$

$- |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_4| - |A_1 \cap A_3 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3 \cap A_4|$

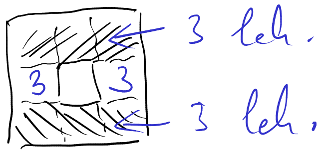
$+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 3^8 - 4\cdot 3^6 + 4\cdot 3^4 + 2\cdot 3^4 - 4\cdot 3^2 + 3.$

Magyarázat: $|A_1| = 3^6$, mert azon színezések száma, amelyekben az 1. sor egyszínű $3\cdot 3^5$, ugyanis a közös szín 3-féle lehet, a többi 5 mező mindegyike 3-féle színt kaphat.



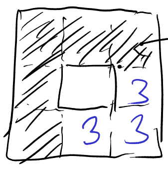
$|A_2| = |A_3| = |A_4| = 3^6$ hasonlóan adódik.

A kettes metszeteknél $|A_1 \cap A_2|$ így alakul: $3 \cdot 3 \cdot 3^2 = 3^4$



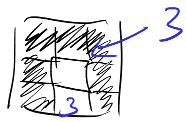
Az 1. sor színe 3-féle, a 3. sor színe 3-féle, a maradék két mező színe 3-3-féle lehet.
$|A_3 \cap A_4|$ hasonló.

A másik 4 kettes metszetnél a következőkhöz hasonló számolás adja az elemszámokat (nézzük pl. $|A_1 \cap A_3|$-at)



Ez az 5 mező egyszínű (a közös szín 3-féle lehet)
A másik 3 mező mindegyikénél a színét 3-féleképpen választhatjuk. Tehát $|A_1 \cap A_3| = 3 \cdot 3^3 = 3^4$.

A hármas metszetek elemszáma 3^2:



Végül, $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 3$, mert ez a metszet azokat a színezéseket tartalmazza, amelyekben az összes mező ugyanolyan színű, és ez a közös szín 3-féle lehet.

5. Van otthon 3 db Mars, 4 db Snickers, 5 db Milky way és 6 db Sport szelet csokink. (Az azonos fajta csokik egyformák, és más csoki nincs otthon.) Három gyermekünk, András, Bea és Cili indul iskolába. Mindhármójuk hátizsákjába rejtünk néhány csokit az otthoni készletből (és otthon is maradhat csoki). Hányféle csokiosztás lehetséges, ha az is előfordulhat, hogy valaki nem kap semmit (akár mindhárman), és az is, ha egyiküknek adjuk az összes meglévő csokit?

M.o.: Valójában a csokikat 4 részre kell osztani (ahol az otthon maradt csokik multihalmaza a negyedik rész).

A 3 db Marsot $\left(\!\binom{4}{3}\!\right)$-féleképpen lehet 4 ember között elosztani,
a 4 db Snickerst $\left(\!\binom{4}{4}\!\right)$-féleképpen — " — ,
az 5 db Milky wayt $\left(\!\binom{4}{5}\!\right)$-féleképpen — " — ,
a 6 db Sport szeletet $\left(\!\binom{4}{6}\!\right)$-féleképpen.
(Itt a 4 ember András, Bea, Cili és az „otthon".)
Mivel a 4-féle csoki elosztása független egymástól, ezért a válasz: $\left(\!\binom{4}{3}\!\right)\left(\!\binom{4}{4}\!\right)\left(\!\binom{4}{5}\!\right)\left(\!\binom{4}{6}\!\right) = \underline{\underline{\binom{6}{3}\binom{7}{3}\binom{8}{3}\binom{9}{3}}}$. □

Kicsit formálisabban ugyanez:
Foglaljuk egy táblázatba, hogy ki melyikből csokiból mennyit kapott: (ez a táblázat egyértelműen leírja az elosztást)

	Mars	Snickers	Milky	Sport
András	a_1	a_2	a_3	a_4
Béla	b_1	b_2	b_3	b_4
Cili	c_1	c_2	c_3	c_4
Otthon marad	o_1	o_2	o_3	o_4

Ahol $a_1, a_2, \ldots, o_4 \in \mathbb{N}$, és

$$a_1+b_1+c_1+o_1=3$$
$$a_2+b_2+c_2+o_2=4$$
$$a_3+b_3+c_3+o_3=5$$
$$a_4+b_4+c_4+o_4=6$$

← Az a_1, b_1, c_1, o_1 számok (vagyis az első oszlop) megválasztására $\left(\!\binom{4}{3}\!\right)$ lehetőség van a tanult lemma szerint.

Hasonlóan a 2. oszlop számainak megválasztására $\left(\!\binom{4}{4}\!\right)$ lehetőség van, további megkötések nélkül.
És így tovább, a 3. oszlopnál $\left(\!\binom{4}{5}\!\right)$, a 4. oszlopnál $\left(\!\binom{4}{6}\!\right)$ lehetőség van, amiből adódik a $\left(\!\binom{4}{3}\!\right)\left(\!\binom{4}{4}\!\right)\left(\!\binom{4}{5}\!\right)\left(\!\binom{4}{6}\!\right)$ válasz.