1. ZÁRTHELYI DOLGOZAT (MEGOLDÁSVÁZLAT)

Válaszainkat mindig részletesen indokoljuk!

1. *Hány olyan sorbaállítása van a KOMBINATORIKA szó betűinek, amely nem úgy kezdődik, hogy KOMBI?*

Megoldás. A „rossz” sorbaállításokat számoljuk meg, amelyek KOMBI-val kezdődnek: a KOMBI után az N, A, T, O, R, I, K, A betűk tetszőleges sorrendben állhatnak, így ezen sorbaállítások száma $\frac{8!}{2!}$, a multihalmazok sorbaállításáról tanultak szerint.

Mivel az összes sorbaállítások száma $\frac{13!}{2!2!2!2!}$, ezért a válasz $\frac{13!}{2!2!2!2!} - \frac{8!}{2!}$. □

2. *Hány olyan részhalmaza van az* $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ *halmaznak, amely pontosan három egyjegyű számot tartalmaz?*

Megoldás. Egy ilyen halmazba a három egyjegyű számot $\binom{9}{3}$-féleképpen választhatjuk meg az $1, 2, \ldots, 9$ számok közül. Utána a többjegyű számok következnek: A $\{10, 11, \ldots, 100\}$ (91 elemű) halmazból tetszőleges elemeket belerakhatunk még a halmazunkba, amelyre 2^{91} lehetőségünk van, hiszen egy tetszőleges részhalmazt kell kijelölni (a belerakandó elemek halmazát). Ez összesen tehát $\binom{9}{3}2^{91}$ lehetőség. □

3. *Egy egységnyi oldalhosszú négyzetbe elhelyeztünk tíz pontot. Bizonyítsuk be, hogy lesz köztük kettő, amelyek távolsága legfeljebb* $\sqrt{2}/3$.

Megoldás. Osszuk fel az egységnégyzetet 3×3 darab $1/3$ oldalhosszú kisnégyzetre. A skatulyaelv szerint lesz olyan kisnégyzet, amelybe legalább két pont kerül. Két ilyen pont megfelelő lesz, mert egy négyzeten belül a legnagyobb távolság az átló hossza, $\sqrt{2}/3$. □

4. *Hányféleképpen lehet az alábbi listában kitölteni a hiányzó pontszámokat úgy, hogy a fiúk összesített pontszáma 100 pont, a lányok összesített pontszáma 90 pont legyen? (Minden pontszám egy tetszőleges nemnegatív egész szám lehet.)*

EREDMÉNYEK:	
Ágoston Tamás	... pont
Balázsi Erika	... pont
Faragó Gábor Zoltán	... pont
Hanzó Viktor	... pont
Hulmann Ádám Ferenc	... pont
Iglódi Ferenc	... pont
Karvák Beatrix	... pont
Komlósi Csilla Ildikó	... pont
Kubatovics Kata	... pont
Nagy Ádám	... pont
Ország Ramóna	... pont
Szibilla Dorka	... pont
Varga Kristóf	... pont

Megoldás. A listában 7 fiú és 6 lány van.

A 7 fiú között 100 pontot kell szétosztani tetszőleges módon, amire $\left(\!\binom{7}{100}\!\right)$ lehetőség van, mint az „egyforintosos” feladatnál. (Precízen, ha a fiúk pontszámait rendre $x_1, x_2, \ldots, x_7$ jelöli fentről lefelé, akkor arra vagyunk kíváncsiak, hogy az $x_1 + x_2 \cdots + x_7 = 100$ egyenletnek hány megoldása van a természetes számok halmazán.)

A lányok pontszámait a fiúk pontszámaitól függetlenül választhatjuk meg; bárhogy is adtuk meg a fiúk pontszámait, a 6 lány között 90 pontot kell szétosztani, amire $\left(\!\binom{6}{90}\!\right)$ lehetőség van a fentiekhez hasonlóan.

Ezek alapján a válasz $\left(\!\binom{7}{100}\!\right)\left(\!\binom{6}{90}\!\right)$. □

5. *Kizárólag az A, B, C, D betűket használva hány olyan (nem feltétlenül értelmes) 15 betűs szót lehet felírni, amelyben mind a négy betű előfordul?*

Megoldás. Logikai szitával oldjuk meg a feladatot. Ω legyen azon 15 betűs szavak halmaza, amelyek mindegyik betűje a megadott 4 betű közül kerül ki; és legyen A_1 az A betűt nem tartalmazó (Ω-beli) szavak halmaza, és hasonlóan legyen A_2 a B betűt, A_3 a C betűt, illetve A_4 a D betűt nem tartalmazó szavak halmaza. Meghatározandó az $\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}$ halmaz elemszáma, amely szitaformulával történhet:

$$\begin{aligned}
|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4}| &= |\Omega| - |A_1| - |A_2| - |A_3| - |A_4| \\
&+ |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + |A_1 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3| + |A_2 \cap A_4| + |A_3 \cap A_4| \\
&- |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - |A_1 \cap A_2 \cap A_4| - |A_1 \cap A_3 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\
&+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \\
&= 4^{15} - \binom{4}{1} \cdot 3^{15} + \binom{4}{2} 2^{15} - \binom{4}{3} 1^{15} + 0,
\end{aligned}$$

ugyanis a metszetek elemszámai könnyen meghatározhatók (ahány halmazt összemetszünk, annyi tiltott betű van; és a megmaradókból felírható összes 15 betűs szót kell megszámolni). $\square$

6.$^{+}$ *Igazoljuk kettős leszámlálással, hogy*

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}.$$

Megoldás. Mindkét oldal azokat az (a_1, a_2, a_3) számhármasokat számolja meg, amelyekre $a_1, a_2, a_3 \in [n+1]$, valamint $a_1 > a_2$ és $a_1 > a_3$ teljesül.

A bal oldal i-edik tagja, i^2, azokat a hármasokat számolja meg, amelyekre $a_1 = i + 1$.

A jobb oldalon az első tag azon hármasok száma, amelyekben 3 különböző szám szerepel: $\binom{n+1}{3}$-féleképpen tudjuk hármasban szereplő 3 különböző számot kiválasztani, ezek kiválasztása után tudjuk, hogy a_1 csak a legnagyobb lehet; a_2 és a_3 között viszont kétféleképpen „oszthatjuk el" a maradék két számot. A jobb oldal második tagja pedig azokat a hármasokat számolja meg, amelyekben csak két különböző szám fordul elő (azaz $a_2 = a_3$): $\binom{n+1}{2}$-féleképpen tudjuk ezt a két számot kiválasztani, és ezek már egyértelműen meghatározzák az (a_1, a_2, a_3) hármast, hiszen a_1 csak a nagyobbik lehet, a_2 és a_3 pedig csak a kisebbik. Más lehetőség nincs. $\square$