

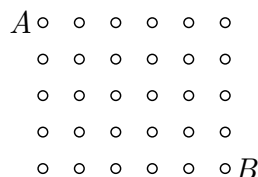
9. ÖSSZEFÜGGŐSÉG, FÁK

Az előadást kiegészítő feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy minden legalább két pontú fának van levele, legalább kettő.
2. Bizonyítsuk be, hogy egy fában bármely két csúcs között pontosan egy út létezik.
3. Mutassuk meg, hogy tetszőleges fán ághajtás operációt végrehajtva ismét fát kapunk.
4. Mutassuk meg, hogy egy fa tetszőleges levelének törlése után a kapott gráf is fa lesz.
5. Legyen T egy fa, és v egy tetszőleges csúcsa T -nek. Mutassuk meg, hogy T felépíthető a v csúcsból kiindulva ághajtás operációkkal.

Gyakorló feladatok

6. Körszerűen elhelyezünk 14 csúcsot, és a negyedszomszédosakat összekötjük. Hány komponense lesz a kapott gráfnak?
7. Az ábrán látható karikák egy telken lévő gyümölcsfákat jelölik.



Az A -val jelölt fán egy cinke, a B -vel jelölt fán egy rigó ül. Mindkét madár az egyik fáról csak a legközelebbi ÉNy-i, ÉK-i, DNy-i vagy DK-i irányban lévő fák egyikére repül. Lehetséges-e, hogy valamikor mindkettő ugyanazon a fán ül?

8. Bizonyítsuk be, hogy ha egy G összefüggő gráf egy köréből elhagyunk egy élt, akkor a maradék gráf is összefüggő lesz.

9. Igazoljuk, hogy egy gráf akkor és csak akkor nem összefüggő, ha pontjait két nemüres osztályba tudjuk sorolni úgy, hogy különböző osztálybeli pontok között ne vezessen él.

10. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G egyszerű gráfra G vagy $\overline{G}$ összefüggő.
11. Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább n , akkor a gráf összefüggő.
12. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfnak legalább $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ éle van, akkor összefüggő. Igaz marad-e az állítás, ha a gráfnak csak $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ éle van?
13. Mutassuk meg, hogy egy összefüggő gráfban bármely két leghosszabb útnak van közös pontja.
14. Igazoljuk, hogy egy T fának legalább $\Delta(T)$ levele van, ahol $\Delta(T)$ a maximális foksámot jelöli T -ben.
15. Egy 210 pontú fában minden csúcs foka 1 vagy 3. Hány levele van a fának?
16. Mutassuk meg, hogy egy n pontú összefüggő gráfnak legalább $n - 1$ éle van.
17. Létezik-e olyan összefüggő gráf, amelynek foksámsorozata $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4$?
18. Igazoljuk, hogy bármely legalább kétpontú összefüggő gráfban van olyan csúcs, amelyet elhagyva a maradék gráf is összefüggő. [11.33]
19. Igazoljuk, hogy ha egy (legalább 2 pontú) teljes gráf éleit pirosra és kékre színezzük, akkor kialakul olyan feszítőfa, melynek minden éle ugyanolyan színű.

20. Egy G gráfban nincs kör, G komponenseinek száma c . Bizonyítsuk be, hogy G éleinek száma $n - c$.

21. Igazoljuk, hogy ha egy n pontú gráfnak legalább n éle van, akkor a gráf tartalmaz kört.

22. Melyek azok a körmentes gráfok, amelyek komplementere is körmentes? Adja meg az összes megfelelő gráfot és igazolja, hogy nem hagyott ki egyet sem.

23. Bizonyítsuk be, hogy egy $2n$ élű fa élhalmaza felbontható n darab diszjunkt párra, ahol egy párban szomszédos élek szerepelnek. [11.24]

24. Jelöljünk ki egy fában 4 levelet. Mutassuk meg, hogy ezek összepárosíthatók úgy, hogy a párok éldiszjunkt utakkal legyenek összekötve.

25. a) Mutassuk meg, hogy egy összefüggő gráfban bármely két leghosszabb útnak van közös pontja.

b) Mutassuk meg, hogy egy fában a leghosszabb utak lefoghatók egyetlen ponttal. (Azaz van olyan pont a fában, amelyen az összes maximális hosszúságú út áthalad.)

Megjegyzés: Megadható olyan összefüggő (nem fa) gráf, amelyben nincs ilyen pont. (De nem könnyű ilyen gráfot találni.)

26.⁺ Legyenek $T_1, \dots, T_k$ egy T fa összefüggő részgráfjai. Bizonyítsuk be, hogy ha bármelyik két T_i és T_j fának van közös pontja, akkor van olyan pont, amely az összes T_i -n rajta van.

27. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf nem tartalmaz páratlan (hosszú) kört, akkor a gráf csúcsait ki lehet színezni két színnel úgy, hogy minden él két végpontja különböző színű legyen.

28.⁺ Egy középkori országban 1000 város van, és bizonyos városok közvetlen földúttal vannak összekötve (csak városokban van útkereszteződés). Ezen az úthálózaton bármelyik városból bármelyik másikba el lehet jutni. Az uralkodó szeretne bizonyos földutakat leköveztetni úgy, hogy minden városból páratlan sok kövesút induljon ki. Mutassuk meg, hogy ez megtehető.

29.⁺ Egy $n \times n$ -es táblázat minden mezőjében egy-egy betű van. A táblázat bármely két sora különböző. Bizonyítsuk be, hogy a táblázatnak van olyan oszlópa, amelyet elhagyva a megmaradó táblázatnak sincs két egyező sora.

Segítség: Próbáljunk indirekten bizonyítani, és vezessünk be egy gráfot. Használjuk (ügyesen) a 21. feladatot.