8. Séták, vonalak, utak, körök

1. Mutassuk meg, hogy ha egy gráfban pontosan két páratlan fokú csúcs van, akkor vezet köztük út.

2. Egy nagy ház minden olyan szobájában van TV-készülék, amelyiknek páratlan sok ajtaja van. Csak egy bejárata van a háznak. Mutassuk meg, hogy ezen a bejáraton bemenve mindig eljuthatunk egy olyan szobába, amelyikben van TV.

3. Igazoljuk, hogy ha egy gráfban minden pont foka legalább 2, akkor a gráf tartalmaz kört.

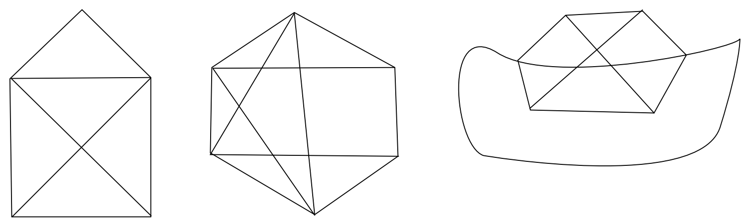
4. A G egyszerű gráfban minden pont foka legalább δ. Bizonyítsuk be, hogy G-ben van (legalább) δ hosszú út.

5. Bizonyítsuk be a következőket:
a) Ha egy gráf 2-reguláris, akkor minden komponense kör.
b) Ha egy gráfban minden pont foka legfeljebb 2, akkor a gráfnak minden komponense út vagy kör (ahol az út komponens 1 pontú, azaz izolált csúcs is lehet).

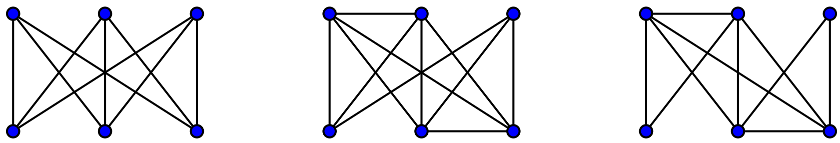
Megjegyzés. Ezek „akkor és csak akkor” állítások, ugyanis a másik irányok nyilvánvalók.

6. Legyen G egy olyan gráf, amelyben minden csúcs fokszáma páros. Bizonyítsuk be, hogy G élhalmaza körök élhalmazainak diszjunkt uniója.

7. Az alábbi három alakzat közül melyek rajzolhatók le a ceruza felemelése nélkül úgy, hogy minden vonalat egyszer és csak egyszer húzunk meg?



8. Az alábbi gráfok közül melyekben van nyílt, illetve zárt Euler-vonal? (Ha van, akkor adjuk is meg.)



9. A G egyszerű gráf csúcshalmaza $\{1, \ldots, 100\}$, továbbá az i és j csúcsok pontosan akkor összekötöttek, ha $1 \leq |i-j| \leq 2$. Van-e nyílt, illetve zárt Euler-vonal G-ben? (Ha igen, adjuk is meg.)

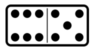
10. a) A H_n egyszerű gráf csúcsai az n hosszú 0-1 (bit)sorozatok ($n \geq 1$), és két csúcs pontosan akkor összekötött, ha a megfelelő bitsorozatok (pontosan) egy bitben térnek el. Van-e Euler-vonal H_n-ben? (Ezt a H_n gráfot az n dimenziós (hiper)kockagráfnak nevezik.)
b) Legyen $n \geq 2$. A $\widetilde{H}_n$ gráf csúcshalmaza ugyanaz, mint H_n csúcshalmaza, és $\widetilde{H}_n$-ben két csúcs pontosan akkor összekötött, ha két bitben térnek el. Van-e Euler-vonal $\widetilde{H}_n$-ben?

11. Igazoljuk, hogy ha egy gráfban minden pont foka páros, akkor a gráf irányítható úgy, hogy a kapott irányított gráfban minden pont kifoka megegyezzen a befokával.

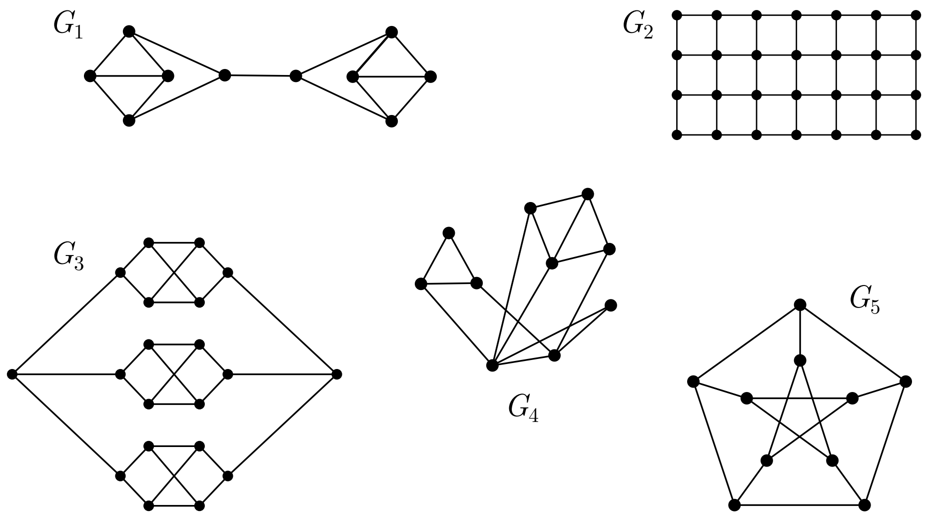
12. Bizonyítsuk be, hogy minden összefüggő gráf bejárható zárt sétával úgy, hogy minden élen pontosan kétszer haladunk végig.

13. Igazoljuk, hogy egy 4-reguláris egyszerű gráf éleit kiszínezhetjük pirossal és kékkel úgy, hogy minden csúcsra két piros és két kék illeszkedjen.

14. Egy dominó két összeragasztott négyzetből áll, mely négyzeteken a 0, 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 szám van (pöttyökkel jelezve). Minden konfiguráció előfordul, így összesen $7 + \binom{7}{2} = 28$ különböző dominó van. Le lehet-e rakni ezt a 28 dominót körszerűen úgy, hogy a szomszédos dominók érintkező fele mindig ugyanannyi pöttyöt tartalmazzon?



15. Döntsük el, hogy az alábbi gráfokban van-e Hamilton-út, Hamilton-kör:



16. Az előző feladat G_2 gráfjának mintájára definiálhatjuk a négyzetrács-gráfokat (a G_2 a 4×7-es négyzetrács-gráf). Mely m, n-ekre van Hamilton-kör az $m\times n$-es négyzetrács-gráfban?

17. Egy páros gráf egyik osztályában 2023, a másik osztályában 2024 csúcs van. Lehet-e Hamilton-kör ebben a gráfban? És Hamilton-út?

18. a) 12 ember vesz részt egy vacsorán. Mindenki legalább 6 embert ismer a társaságból. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Bizonyítsuk be, hogy le tudnak úgy ülni egy kör alakú asztal mellé, hogy mindenki ismeri a két szomszédját.

b) Késve megérkezik András, aki legalább 7 embert ismer a jelenlévők közül. Igazoljuk, hogy Andrással együtt a 13 ember le tud ülni az előzőek szerint.

c) Akkor is tudnánk-e ezt, ha András csak 6 embert ismerne?

19. Van-e Hamilton-kör a H_n hiperkockagráfban?

20. Bejárható-e a 4×4-es sakktábla lóugrásokkal úgy, hogy minden mezőre egyszer lépünk?

21. Egy $3\times 3\times 3$ méretű sajtkocka 27 kis kockából áll. Egy egér a kis kockákat egyesével tervezi elfogyasztani úgy, hogy egy kis kocka után mindig olyan kocka következzen, amelyiknek az épp elfogyasztottal van közös lapja. Az egér az egyik sarokból kezdi a lakomát. El tudja-e fogyasztani a teljes sajtot út, hogy utoljára olyan kockát fogyasszon, aminek van közös lapja az elsővel?

22. Igazoljuk, hogy a $\{1, 2, \ldots, 16\}$ halmaz 3-elemű részhalmazait el lehet helyezni körszerűen úgy, hogy a szomszédos halmazok mindig diszjunktak legyenek.

23. Igazoljuk, hogy ha egy $2n+1$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább n, akkor a gráf tartalmaz Hamilton-utat. (Segítség: Vezessük vissza a Dirac-tételre a feladatot.)

24. (Rédei tétele.) Egy bajnokságon mindenki egyszer játszott mindenkivel. Döntetlen nincs. Igazoljuk, hogy a játékosoknak mindig van egy olyan sorrendje, melyben az első legyőzte a másodikat, a második a harmadikat, és így tovább, az utolsó előtti legyőzte az utolsót.