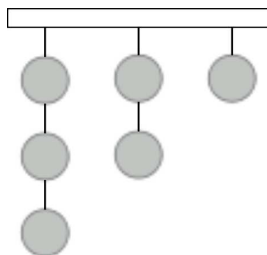


4. SORBAÁLLÍTÁSOK, ÁTRENDÉZÉSEK

1. Béla, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt. A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnévűek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé?
2. Hányféleképpen lehet n bátyát elhelyezni az $n \times n$ -es sakktáblán úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást?
3. Hányféleképpen lehet n házaspár összesen $2n$ tagját sorbaállítani úgy, hogy mindegyik házaspár két tagja egymás mellé kerüljön?
4. Hányféleképpen ülhet le egy kör alakú asztalhoz hét ember? (Két ülémódot nem tekintünk különbözőnek, ha mindenkinek ugyanaz a két szomszédja.) [4.29]
5. A játszótéren 12 gyerek ül fel a körhintára. Panni, Léna és Eszter mindenképp egymás mellé szeretnének kerülni (valamilyen sorrendben), viszont Cili nem hajlandó Léna mellé ülni. Hányféleképpen helyezkedhetnek el? (Megj.: A forgatással egymásba vihet. elrendezéseket – és csak azokat – nem tekintjük különbözőnek.)
6. a) Tekintsük azon négyjegyű számokat, melyek minden jegye különböző, és nem tartalmaznak 0-t. Mennyi ezeknek a számoknak az összege?
b) És mi a helyzet, ha a 0 számjegy is megengedett?
7. a) Egy 20 fős osztályban egyik órán párokban kell dolgozni (tíz párt kell kialakítani). Hányféleképpen lehet ezt megtenni?
b) Óra után fényképezkedik az osztály. Két tízes sorba kell állniuk úgy, hogy a hátsó sor mind a tíz gyereke előtt alacsonyabb gyerek álljon. Hányféle fénykép készülhet? (A gyerekek mind különböző magasságúak.)
8. Van 12 virágpalántánk: 8 különböző tulipán és 4 különböző rózsza. Hányféle sorrendben tudjuk ezeket a palántákat kiültetni a virágoskertünk egy sorába úgy, hogy ne kerüljön egymás mellé két rózsza?
9. (Vö. 1. feladatsor vázáz feladata.) 20 különböző virágot szeretnénk elültetni 5 különböző virágládába (láda maradhat üresen is). Hányféle ültetés van, ha két ültetést akkor tekintünk egyformának, ha mindegyik ládára a két ültetésben ugyanazok a virágok vannak, ugyanolyan sorrendben?
10. Hányféleképpen állhat be n vásárló egy bolt k pénztárához fizetni? (A vásárlókat és a pénztárakat is megkülönböztetjük.) [TK. 3.4.8.]
11. Hány olyan sorbaállítása van az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmaznak, hogy az első helyen álló szám kivételével minden másik i számra igaz, hogy $i - 1$ vagy $i + 1$ az i előtt áll valahol?
- 12.⁺ Hányféleképpen lehet úgy sorbaállítani $\binom{[n]}{1} \cup \binom{[n]}{2}$ elemeit, hogy minden kételemű $\{u, v\}$ halmaz az $\{u\}$ és $\{v\}$ halmazoknál később következzen a sorbaállításban? [Monthly, 2023.]
13. Egy céllövöldében hat lufi lóg az ábrán látható módon. A 6 lufit kell egyesével lelőnünk úgy, hogy minden zsinóron csak az eddig ki nem lőtt legalsó lufi célozható. Hányféle (megengedett) sorrendben lőhetjük le a 6 lufit?



14. Hányféleképpen lehet a MATEMATIKA szó betűit leírni úgy, hogy a kialakult szóban az *első* M betű a 6. helyen álljon? (Például egy ilyen szó az AKIETMAAMT.)
15. Hányféleképpen lehet leírni a MISSISSIPPI szó betűit úgy, hogy a négy S betű ne kerüljön egymás mellé? [4.13]
16. Hányféleképpen lehet leírni a KOMBINATORIKA szó betűit úgy, hogy a B és M betűk ne kerüljenek egymás mellé?
17. n különböző pár zoknit rakunk be egy mosógépbe. A mosás után a zoknikat egyesével húzzuk ki a mosógépből. Hányféle kihúzási sorrend esetén lesz az i -edik kihúzott zokni az, amelyik az első párt fejezi be? [4.22]
18. Hány nullára végződik a $((3!)!)!$ szám? [4.6]
- 19.⁺ Bizonyítsuk be az $(n!)^{n+1} | (n^2)!$ oszthatóságot, lehetőleg kombinatorikus úton. [4.8]
20. Legyen $p_n(k)$ egy n elemű halmaz pontosan k fixponttal rendelkező permutációinak száma. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=0}^n k p_n(k) = n!$. [4.11]
- 21.⁺ Bizonyítsuk be Wilson tételét, mely szerint tetszőleges p prímszámra $p | (p-1)! + 1$. Segítség: Lásd [4.31].
22. Határozza meg az x^{10} együtthatóját az $(1-x+x^3)^{14}$ polinomban.
23. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 2$, akkor az $[n]$ halmaznak ugyanannyi páros inverziószámú sorbaállítása van, mint páratlan inverziószámú.
- 24.⁺ Egy börtönben 100 rab raboskodik. A gonosz börtönigazgató a következőt hirdeti ki: „Egy óra múlva minden rab homlokára felírok egy valós számot; ezek között nem lesz két egyforma. Mindenki látja majd a többiek számait, de a sajátját nem. Ezután kaptok egy kis gondolkodási időt, és mindenkinek választania kell egy piros vagy kék sapkát. Persze egymás választásait nem láthatjátok, és kommunikálni tilos a játék alatt. Utána a homlokotokra írt számok nagyság szerinti sorrendje szerint felsorakoztatlak bennetek, és ha két szomszédos emberen azonos színű sapkát látok, akkor mindenkit felakasztatok.” Milyen stratégiát találjanak ki a rabok a hátralévő egy órában, ha el akarják kerülni a büntetést?
25. Bizonyítsuk be a következő egyenlőségeket: [TK. 4.5.3.]
- $\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!$,
 - $\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} = (n-1)! \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)$,
 - $\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1$,
 - $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix} = \binom{n}{2}$,
 - $\begin{bmatrix} n \\ n-2 \end{bmatrix} = 2\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$.
26. Véletlenül választunk egy permutációt S_n -ből. Mi annak a valószínűsége, hogy az ‘1’ elemet tartalmazó ciklus hossza k ?
27. Véletlenül választunk egy permutációt S_n -ből. Mi annak a valószínűsége, hogy az ‘1’ és ‘2’ elemek ugyanabban a ciklusban lesznek?
28. Hány olyan permutációja van $[2n]$ -nek, amelyben minden ciklus hossza 2?
29. Hány olyan permutációja van $[2n]$ -nek, amelyben minden ciklus hossza páros?
- 30.⁺ Mennyi a ciklusok száma S_n permutációiban összesen?
31. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 2$, akkor S_n -ben ugyanannyi páros sok ciklust tartalmazó permutáció van, mint páratlan sok ciklust tartalmazó!
- 32.⁺ Egy városban csak két család közötti lakáscserét lehet elvégezni (több családot érintő lakáscsere tilos), és egy család egy nap csak egyszer költözhet. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges lakáscsere elvégezhető két nap alatt. [4.44]