

2. BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓK, POLINOMOK

1. Hány olyan részhalmaza van az $\{1, 2, 3, \dots, 100\}$ halmaznak, amely pontosan három egyjegyű számot tartalmaz?
2. Egy raktárban 20 öltöny van, amelyek közt 9 szövési hibákat tartalmaz, a többi hibátlan. Egy kereskedő kiválaszt 15 öltönyt. Hány olyan választási lehetősége van, hogy legfeljebb 5 legyen hibás?
3. Hány olyan hétjegyű telefonszám van, amely 4-essel kezdődik, pontosan 3 db 2-es van benne, és nincs benne 0?
4. Hányféleképpen helyezkedhet el 12 ember három szobában, ha
 - a) az elsőben ketten, a másodikban hatan, a harmadikban négyen férnek el?
 - b) ráadásul András és Béla nem hajlandóak egy szobában lenni?
5. A Bolyai Közlekedési Vállalat (BKV) jegyein az alábbi 5×5 -ös számtáblázat szerepel:

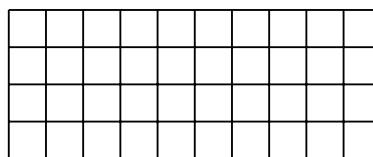
1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Az előírás szerint a buszon található lyukasztónak tíz számot kell kilyukasztania úgy, hogy minden sorban pontosan kettő legyen kilyukasztva. (Az oszlopokra nincs megkötés.) Hány ilyen lyukasztási mód van?

6. A 32 lapos magyar kártyából egyszerre kihúzzunk 6 lapot. Hányféleképpen tehetjük ezt meg úgy, hogy a kihúzott lapok között pontosan két piros lap és pontosan két ász legyen? (A kihúzott lapok sorrendje nem számít.)
7. Hányféleképpen lehet szétosztani az $1, 2, 3, \dots, 9$ számokat a $_$ helyekre úgy, hogy a megadott kisebb/nagyobb relációk teljesüljenek?

$_ < _ < _ < _ > _ > _ > _ > _ > _$

8. Hány téglalapot határoznak meg az alábbi rács vonalai? [3.4]



9. Hányféleképpen juthatunk el egy sakktábla bal alsó mezőjéről a jobb felsőre, ha egyszerre csak felfelé vagy jobbra léphetünk egy mezőnyit?
10. Öt barátunknak szeretnénk képeslapokat küldeni, mindegyik barátunknak kettőt. Hányféle módon tehetjük ezt meg, ha a postán hatféle képeslapot árulnak? (Mindegyik fajta képeslapból elegendően sok van. A képeslapok feladásának sorrendje természetesen nem számít.)
11. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai egy adott szabályos 23-szög csúcsai közül valók, és amely tartalmazza a sokszög középpontját? [3.3]
12. Felveszünk 30 különböző pontot a síkon úgy, hogy ne legyen három egy egyenesen. Minden pontot minden ponttal összekötünk, és az összekötő szakaszokat pirossal vagy kézzel színezzük. Minden pontból pontosan 12 kék színű szakasz indul ki, a többi pedig piros. Vizsgáljuk az így kialakult háromszögeket. Ha egy háromszög minden oldala ugyanolyan színű, akkor a belsejét is kiszínezzük. Összesen hány háromszöget színezzünk be? [Szakest, 2018]

13. Mi a valószínűsége annak, hogy egy lottóhúzás öt száma között van legalább két szomszédos (azaz két olyan szám, amelynek különbsége 1)? [3.6]

14.⁺ Az 1987. évi 34. heti lottóhúzáskor két pár egymás utáni számot is kihúztak: a (31, 32)-t és az (50, 51)-et. Mi annak a valószínűsége, hogy a jövő heti húzás eredménye hasonlóan alakul, azaz kihúznak két szomszédos számból álló párt, de nem húznak ki három egymás utáni számot? [3.7]

15. Bizonyítsuk be, hogy bármely $n \geq 2$ természetes számra

$$\frac{2^n}{n} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq \frac{2^n}{\sqrt{n}}.$$

16. Bizonyítsuk be, hogy $n \geq k \geq 1$ esetén

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k.$$

17. Az f függvény az $\{1, 2, \dots, 20\}$ halmaz minden 9 elemű S részhalmazához hozzárendel egy 1 és 20 közötti egész számot. Bizonyítsuk be, hogy f választásától függetlenül lesz egy 10 elemű $T \subset \{1, 2, \dots, 20\}$ részhalmaz, amelyre teljesül, hogy $f(T \setminus \{k\}) \neq k$ minden $k \in T$ esetén. [3.26]

18. $\binom{90}{5}$ páros vagy páratlan? (A kérdést próbáljuk a $\binom{90}{5}$ binomiális együttható pontos értékének kiszámítása nélkül megválaszolni.)

19. Igazoljuk a következő kongruenciákat (mod 2):

$$\binom{2n}{2k+1} \equiv 0, \quad \binom{2n}{2k} \equiv \binom{n}{k}, \quad \binom{2n+1}{2k} \equiv \binom{n}{k}, \quad \binom{2n+1}{2k+1} \equiv \binom{n}{k}.$$

20. Igazoljuk, hogy $(1+x)^{2^n}$ kifejtésében az 1 és x^{2^n} monomokon kívül mindegyik páros együtthatóval szerepel.

21. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat: [3.17]

a) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$

b) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n.$

c) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0, \quad \text{ha } n \geq 1.$

d) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$

e) $\binom{n}{k} \binom{k}{l} = \binom{n}{l} \binom{n-l}{k-l}.$

f) $0 \binom{n}{0} + 1 \binom{n}{1} + 2 \binom{n}{2} + \dots + n \binom{n}{n} = n2^{n-1}.$

g) $\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \dots + \binom{k}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$

h) $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}.$

22. Igazoljuk kettős leszámhlálással a következő ismert összefüggéseket:

a)
$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \binom{n+1}{2}$$

b)
$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$$

23. Hozzuk zárt alakra a következő kifejezést:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 4^k (-1)^{n-k}.$$

24. a) A binomiális tételre való hivatkozás nélkül, kettős leszámhlálással bizonyítsuk, hogy minden n és m pozitív egészre teljesül, hogy

$$(m+1)^n = 1 + \binom{n}{1}m + \binom{n}{2}m^2 + \binom{n}{3}m^3 + \dots + \binom{n}{n}m^n.$$

b) Miért következik az előző pontból a binomiális tétel?

25.⁺ Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor

$$(5 + \sqrt{26})^n$$

tizedestört-alakjában a tizedesvesszőt követő első n jegy egyenlő. [3.21]

26. Írjuk fel egyszerűbb alakban az $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})$ polinomot!

27. Indokoljuk meg, hogy a következő két feladatnak mi köze van egymáshoz, és a b) feladatot az a) feladat felhasználásával oldjuk meg:

- a) Határozzuk meg az $(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})(1+x^{10})(1+x^{20}+x^{40})$ polinomszorzás eredményét. Ehhez használhatunk számológépet, pl. a WolframAlpha `expand` parancsát.
- b) Pénztárcánkban négy 5-forintos, egy 10-forintos, és két 20-forintos van. Milyen összegeket tudunk pontosan kifizetni (tehát úgy, hogy a pénztárosnak ne kelljen visszaadni)? Az egyes kifizetéseknél hány lehetőségünk van?

28.⁺ Lehetséges-e két dobókockát úgy „cinkelni” (tehát az egyes számok dobásának valószínűségét úgy megváltoztatni), hogy a feldobások után a kapott számokat összeadva 2-től 12-ig minden lehetséges összeg bekövetkezésének valószínűsége azonos legyen? [3.39]

29.⁺ Azt szeretnénk megtippelni, hogy a kihúzott lottószámok összege páros vagy páratlan lesz-e. Melyik lehetőségnek nagyobb a valószínűsége

- a) ötöslottó esetén (90 számból 5-öt húznak ki),
- b) hatoslottó esetén (45 számból 6-ot húznak ki),
- c) skandináv lottó esetén (35 számból 7-et húznak ki)?

Olyan megoldást adjunk, amely nagy számok esetén is működik (pl. ha 2024 számból húzunk 100-at).