A polinomok kétféle szemlélete közötti kapcsolat

Egy valós együtthatós (formális) polinomra tekinthetünk $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényként is a megszokott módon: „Az $\alpha \in \mathbb{R}$ számhoz azt a számot rendeljük, amelyet úgy kapunk, hogy a polinomban x helyére α-t írunk, és elvégezzük a műveleteket.”

Nem nehéz meggondolni a következőt:

Állítás. a) *Két valós együtthatós (formális) polinom akkor és csak akkor egyenlő, ha egyenlők mint függvény (azaz ha ugyanazt az értéket veszik fel minden pontban).*
b) *Formális polinomok összeadásakor/szorzásakor a polinomoknak megfelelő függvények is összeadódnak/összeszorzódnak (pontonként).*

Az a) állítás szerint két polinom egyenlőségét (például a binomiális tételt) úgy is bizonyíthatjuk, hogy megmutatjuk, hogy mint függvény megegyeznek, vagyis bármilyen számot is helyettesítünk x helyére, ugyanazt az értéket veszik fel. Sőt, ennél kevesebb is elég:

Lemma. *Ha két legfeljebb n-edfokú polinom ugyanazt az értéket veszi fel $n+1$ különböző helyen, akkor a két polinom megegyezik.*

Bizonyítás. A polinomok különbsége egy olyan legfeljebb n-edfokú polinom, amelynek $n+1$ gyöke van, így az csak az azonosan 0 polinom lehet. □

Megjegyzés. A fentieknek NINCS megfelelője formális hatványsorokra (csak részben), épp ezért vezettük be a fogalmat. Például a $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n^2} x^n$ és a $\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n$ formális hatványsorok nyilván különbözők, de ha a kalkulus kurzuson látott értelemben függvénysorként próbálnánk értelmezi őket, akkor megegyeznének: az $x = 0$ helyen mindkét sorösszeg 1, az $x \neq 0$ helyeken pedig mindkét sor divergens.

Néhány hasznos helyettesítés

Ha az $(a_k)_{k=0}^{n}$ véges sorozat generátorfüggvénye – ami egy polinom – szép zárt alakra hozható, akkor ebből azonnal nyerhető pár hasznos információ a sorozatról: Áttérve a függvényszemléletre, az $x = 1$ helyettesítés megadja a sorozatelemek összegét; az $x = -1$ helyettesítés megadja a sorozatelemek váltakozó előjelű összegét; a generátorfüggvény deriválásával pedig megkapjuk a $(ka_k)_{k=1}^{n}$ sorozat, vagyis az $1a_1, 2a_2, 3a_3, \dots, na_n$ sorozat generátorfüggvényét. (Utóbbi végtelen sorozatokra is igaz, lásd formális hatványsorok deriválását később.)

Ezt egy példán keresztül mutatjuk be. Rögzített n esetén az $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n}$ binomiális együtthatók generátorfüggvénye a binomiális tétel szerint

$$(\clubsuit) \qquad \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 \cdots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n.$$

I. Ha $x = 1$-et helyettesítünk ($\clubsuit$)-be, akkor a korábban már bizonyított összefüggést kapjuk:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

II. Ha $x = -1$-et helyettesítünk ($\clubsuit$)-be, akkor az

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n\binom{n}{n} = (1-1)^n = 0^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \geq 1 \\ 1, & \text{ha } n = 0 \text{ (?!)} \end{cases}$$

azonosságot kapjuk. (Mivel $n = 0$ esetén a bal oldal 1, most a $0^0 := 1$ definíció természetes.) Kaptuk, hogy $n \geq 1$ esetén egy n elemű halmaz páros elemszámú részhalmazai számának és páratlan elemszámú részhalmazai számának különbsége,

$$\left(\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots\right) - \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots\right) = 0,$$

új bizonyítást nyerve arra, hogy *egy* ***nemüres*** *halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van, mint páratlan elemszámú.*

III. Ha két függvény egyenlő, akkor a deriváltjaik is azok, így (♣)-et deriválva megkapjuk az $1\binom{n}{1}, 2\binom{n}{2}, 3\binom{n}{3}, \ldots, n\binom{n}{n}$ sorozat generátorfüggvényének zárt alakját:

$$(\clubsuit) \qquad \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 \cdots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n \qquad \Big/ \, '$$

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

Ebből például a gyakorlaton bizonyított azonosság adódik $x = 1$ helyettesítéssel:

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}.$$