1. zárthelyi dolgozat (megoldásvázlat)

1. Összesen 2^{10} darab részhalmaza van $\{1,\dots,10\}$-nek. Ezek közül azok a nem számolandók („rosszak”), amelyek nem tartalmaznak 3-mal osztható számot, és ezek pontosan a $[10]\setminus\{3,6,9\}=\{1,2,4,5,7,8,10\}$ halmaz részhalmazai. Ennek a 7 elemű halmaznak 2^7 darab részhalmaza van, ennyi tehát a „rossz”, azaz a 3-mal osztható számot NEM tartalmazó részhalmazok száma. Így a válasz: $2^{10}-2^7=896$. $\square$

2. Az első sorban öt elemből kell kettőt kiválasztani lyukasztásra (ezt $\binom{5}{2}$-féleképpen tehetjük meg), majd a második sorban ismét öt elemből kettőt ($\binom{5}{2}$ lehetőség), és így tovább, végül az ötödik sorban is $\binom{5}{2}$ lehetőség van a lyukak helyének kijelölésére. További megkötés nincs, így a válasz $\binom{5}{2}\binom{5}{2}\binom{5}{2}\binom{5}{2}\binom{5}{2}=10^5=100000$. $\square$

3. A feladat azon $[4]$ feletti 50 elemű multihalmazok összeszámlálását kéri, amelyekben az ‘1’,‘2’,‘3’ elemek multiplicitása legalább 2, a ‘4’ elem multiplicitása legfeljebb 2. (Mesével: Hányféleképpen lehet 50 db egyforintost szétosztani Anna, Béla, Cili és Dezső között úgy, hogy Anna, Béla és Cili legalább 2-2 forintot kapjanak, Dezső pedig legfeljebb 2 forintot?)

Az x_4 értéke (a ‘4’ elem multiplicitása) lehet 0, 1 vagy 2, ezzel három osztályba sorolhatjuk a megszámolandó megoldásokat. Például, azon megoldásokat, amelyekre $x_4=1$, a következőképpen számolhatjuk össze:

$$\begin{array}{cccc}
\ast & & & \\
\ast & & \ast & \\
\ast & & \ast & \\
\ast & \ast & \ast & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \\
\ast & \ast & \ast & \\
\ast & \ast & \ast & \\
\textcolor{red}{\ast} & \textcolor{red}{\ast} & \textcolor{red}{\ast} & \\
\textcolor{red}{\ast} & \textcolor{red}{\ast} & \textcolor{red}{\ast} & \textcolor{green}{\ast} \\
x_1 & x_2 & x_3 & x_4
\end{array}$$

x_4 értéke fixen 1, tehát az $x_1,x_2,x_3\in\mathbb{N}$ számokra az $x_1+x_2+x_3=49$ és $x_1,x_2,x_3\geq 2$ feltételeknek kell teljesülnie. (A “pöttydiagram” negyedik oszlopában pontosan egy $\ast$-nak kell lennie; az első három oszlop mindegyikében legalább 2-nek, összesen 49-nek.) Ezeket a megoldásokat/multihalmazokat a szokásos módon számolhatjuk össze: a zölddel és pirossal jelölt $\ast$-ok fixek (a zöld $\ast$ az $x_4=1$ feltétel, a piros $\ast$-ok az $x_1,x_2,x_3\geq 2$ feltétel miatt), tehát a maradék 43 csillagot kell tetszőlegesen szétosztani az első három oszlop között, amelyre $\left(\!\!\binom{3}{43}\!\!\right)$ lehetőség van. („Dezső megkapja a neki járó 1 ft-ot; András, Béla és Cili kapnak 2-2 ft-ot fixen, és az e fölötti részük a maradék 43 forint A, B és C közötti szétosztásából jön.”)

Az $x_4=0$ és $x_4=2$ esetekhez tartozó megoldások hasonlóan számolhatók meg, ezekre rendre $\left(\!\!\binom{3}{44}\!\!\right)$ és $\left(\!\!\binom{3}{42}\!\!\right)$ adódik, amiből a válasz: $\left(\!\!\binom{3}{44}\!\!\right)+\left(\!\!\binom{3}{43}\!\!\right)+\left(\!\!\binom{3}{42}\!\!\right)=\binom{46}{2}+\binom{45}{2}+\binom{44}{2}=2971.$ $\square$

Megjegyzés. Az $x_4=1$ esethez tartozó megoldások fent részletezett összeszámlálása formálisan: Ezen megoldások $x_1=2+x_1'$, $x_2=2+x_2'$, $x_3=2+x_3'$, $x_4=1$ alakúak, ahol $x_1',x_2',x_3'\in\mathbb{N}$ és $(2+x_1')+(2+x_2')+(2+x_3')+1=50 \Leftrightarrow x_1'+x_2'+x_3'=43$, további megkötés nélkül; és az x_1', x_2', x_3' természetes számok ilyen megválasztására $\left(\!\!\binom{3}{43}\!\!\right)$ lehetőség van.

4. Lásd **IV/9.** feladat, $n=15$, $i=10$. $\square$

5. Legyen Ω az $[n]$ összes sorbaállításainak halmaza. A_1 legyen $[n]$ azon sorbaállításainak halmaza, amelyekben az ‘1’ elem az 1. helyen áll. A ‘2’ és ‘3’ elemekhez analóg módon definiáljuk az A_2 és A_3 halmazokat. A feladat az $|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}|$ meghatározását kéri, amely a logikai szita alapján:

$$\begin{aligned}
|\overline{A_1\cup A_2\cup A_3}| &= |\Omega|-|A_1|-|A_2|-|A_3|+|A_1\cap A_2|+|A_1\cap A_3|+|A_2\cap A_3|-|A_1\cap A_2\cap A_3| =\\
&= n!-(n-1)!-(n-1)!-(n-1)!+(n-2)!+(n-2)!+(n-2)!-(n-3)! =\\
&= n!-3\cdot(n-1)!+3\cdot(n-2)!-(n-3)!
\end{aligned}$$

A metszetek elemszámainak meghatározása az elcserélt levelek problémájánál látott módon történik (ld. **V/8.** feladat), ezért nem részletezzük. □

6. a) A megoldás: $a_n = 3 \cdot (-2)^n + 2 \cdot 4^n$.

b) $a_2 = 2a_1 + 8a_0 = 2 \cdot 2 + 8 \cdot 5 = 44$.

$a_2 = 3 \cdot (-2)^2 + 2 \cdot 4^2 = 12 + 32 = 44$.

A két eredmény valóban megegyezik. □