9. Fák

Az előadást kiegészítő feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy minden legalább két pontú fának van levele, legalább kettő.

2. Bizonyítsuk be, hogy egy fában bármely két csúcs között pontosan egy út létezik.

3. Mutassuk meg, hogy tetszőleges fán ághajtás operációt végrehajtva ismét fát kapunk.

4. Mutassuk meg, hogy egy fa tetszőleges levelének törlése után a kapott gráf is fa lesz.

5. Legyen T egy fa, és v egy tetszőleges csúcsa T-nek. Mutassuk meg, hogy T felépíthető a v csúcsból kiindulva ághajtás operációkkal.

Gyakorló feladatok

6. Igazoljuk, hogy egy T fának legalább $\Delta(T)$ levele van, ahol $\Delta(T)$ a maximális fokszámot jelöli T-ben.

7. Egy 210 pontú fában minden csúcs foka 1 vagy 3. Hány levele van a fának?

8. Mutassuk meg, hogy egy n pontú összefüggő gráfnak legalább $n-1$ éle van.

9. Létezik-e olyan összefüggő gráf, amelynek fokszámsorozata $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4$?

10. Igazoljuk, hogy bármely legalább kétpontú összefüggő gráfban van olyan csúcs, amelyet elhagyva a maradék gráf is összefüggő. [11.33]

11. Igazoljuk, hogy ha egy (legalább 2 pontú) teljes gráf éleit pirosra és kékre színezzük, akkor kialakul olyan feszítőfa, melynek minden éle ugyanolyan színű.

12. Egy G gráfban nincs kör, G komponenseinek száma c. Bizonyítsuk be, hogy G éleinek száma $n-c$.

13. Igazoljuk, hogy ha egy n pontú gráfnak legalább n éle van, akkor a gráf tartalmaz kört.

14. Bizonyítsuk be, hogy egy $2n$ élű fa élhalmaza felbontható n darab diszjunkt párra, ahol egy párban szomszédos élek szerepelnek. [11.24]

15. Jelöljünk ki egy fában 4 levelet. Mutassuk meg, hogy ezek összepárosíthatók úgy, hogy a párok éldiszjunkt utakkal legyenek összekötve.

16. a) Mutassuk meg, hogy egy összefüggő gráfban bármely két leghosszabb útnak van közös pontja.
b) Mutassuk meg, hogy egy fában a leghosszabb utak lefoghatók egyetlen ponttal. (Azaz van olyan pont a fában, amelyen az összes maximális hosszúságú út áthalad.)
Megjegyzés: Megadható olyan összefüggő (nem fa) gráf, amelyben nincs ilyen pont. (De nem könnyű ilyen gráfot találni.)

17.$^+$ Legyenek $T_1, \dots, T_k$ egy T fa összefüggő részgráfjai. Bizonyítsuk be, hogy ha bármelyik két T_i és T_j fának van közös pontja, akkor van olyan pont, amely az összes T_i-n rajta van.

18. Bizonyítsuk be, hogy ha egy gráf nem tartalmaz páratlan (hosszú) kört, akkor a gráf csúcsait ki lehet színezni két színnel úgy, hogy minden él két végpontja különböző színű legyen.

19.$^+$ Egy középkori országban 1000 város van, és bizonyos városok közvetlen földúttal vannak összekötve (csak városokban van útkereszteződés). Ezen az úthálózaton bármelyik városból bármelyik másikba el lehet jutni. Az uralkodó szeretne bizonyos földutakat leköveztetni úgy, hogy minden városból páratlan sok kövesút induljon ki. Mutassuk meg, hogy ez megtehető.

20.$^{+}$ Egy $n{\times}n$-es táblázat minden mezőjében egy-egy betű van. A táblázat bármely két sora különböző. Bizonyítsuk be, hogy a táblázatnak van olyan oszlopa, amelyet elhagyva a megmaradó táblázatnak sincs két egyező sora.

Segítség: Próbáljunk indirekten bizonyítani, és vezessünk be egy gráfot. Használjuk (ügyesen) a 13. feladatot.