7. Gráfelméleti alapok

1. Egy 8 fős társaságban mindenki felírta, hogy hány barátja van a társaságban. (A barátságok kölcsönösek.) A következő számokat kaptuk: $3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5$. Mutassuk meg, hogy legalább egy ember téves számot írt.

2. Bizonyítsuk be, hogy minden társaságban azoknak a száma, akik páratlan sok embert ismernek, páros szám. (Az ismeretségek kölcsönösek.)

3. Bizonyítsuk be, hogy minden legalább két főből álló társaságban található két olyan ember, akinek ugyanannyi ismerőse van.

4. A G egyszerű gráf fokszámsorozata: $1, 1, 1, 2, 2, 2, 5$. Hány éle van $\overline{G}$-nek, azaz G komplementerének?

5. Egy kocka éleit tetszőleges módon megszámoztuk az 1-től 12-ig terjedő egész számokkal. Ezek után a kocka mindegyik csúcsához felírtuk azt a számot, amelyik egyenlő a belőle kiinduló élekhez írt számok összegével.

a) Bizonyítsuk be, hogy ezek az összegek nem lehetnek mind egyenlők.
b) Vajon egyenlők lehetnek-e valamennyien abban az esetben, ha az egyik élhez írt számot 13-ra változtatjuk? [OKTV, 1987/1988.]

6. Egy körmérkőzéses sakktornán 10 résztvevő van. 11 partit már lejátszottak. Bizonyítsuk be, hogy van olyan versenyző, aki már legalább 3 partit játszott.

7. Egy 10 férfiból és 10 nőből álló baráti társaságban minden férfi 5 emberrel fogott kezet az este folyamán. Hány férfi–nő kézfogás történt, ha tudjuk, hogy az összes férfi–férfi kézfogások száma 12? (Férfi–nő kézfogás: Egy férfi és egy nő fog kezet. Férfi–férfi kézfogás: Két férfi fog kezet.)

8. Egy klubesten tizennégy fő vett részt. Egy játék során mindenki felírta egy cédulára, hogy az est folyamán hány különböző (ellenkező nemű) partnerrel táncolt. A cédulákon rendre a

$$3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6$$

számok szerepeltek. Bizonyítsuk be, hogy valaki tévedett.

9. Egy 9 tagú társaságban mindenki pontosan öt másik embernek átad 100 Ft-ot. Bizonyítsuk be, hogy az ajándékozások után van két olyan ember, akinek ugyanannyi forinttal változott a pénze (a változás előjelét is figyelembe véve).

10. Egy pingpongbajnokságon a tíz résztvevő közül mindenki egyszer játszott mindenkivel. Az egyes versenyzők győzelmeinek és vereségeinek száma legyen rendre $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$, illetve $y_1, y_2, \ldots, y_{10}$. Bizonyítsuk be, hogy

$$x_1^2 + \cdots + x_{10}^2 = y_1^2 + \cdots + y_{10}^2.$$

11. Egy üdülő bármely három lakója között van kettő, aki nem ismeri egymást, de bármely hét között van legalább kettő, aki ismeri egymást. Az üdülés befejeztével mindenki megajándékozza minden ismerősét egy-egy ajándéktárggyal. Bizonyítsuk be, hogy n lakó esetén legfeljebb $6n$ ajándéktárgyat adtak át.

12. Egy partin öt házaspár vett részt. A parti elején elején látszólag véletlenszerűen néhányan kézfogással üdvözölték egymást (senki nem fogott kezet a házastársával). Az egyik férj kíváncsi lett, és mindenkitől megtudakolta a kézfogásai számát (a feleségétől is). Meglepetten vette tudomásul, hogy kilenc különböző választ kapott. Hány emberrel fogott kezet a felesége?

13. Egy pingpongbajnokságon mindenki egyszer játszott mindenkivel. Azt mondjuk, hogy az A játékos közvetett módon legyőzte a B játékost, ha van olyan A által megvert C játékos, aki B-t megverte. Igazoljuk, hogy van olyan játékos, aki minden más játékost legyőzött közvetlenül vagy közvetett módon.

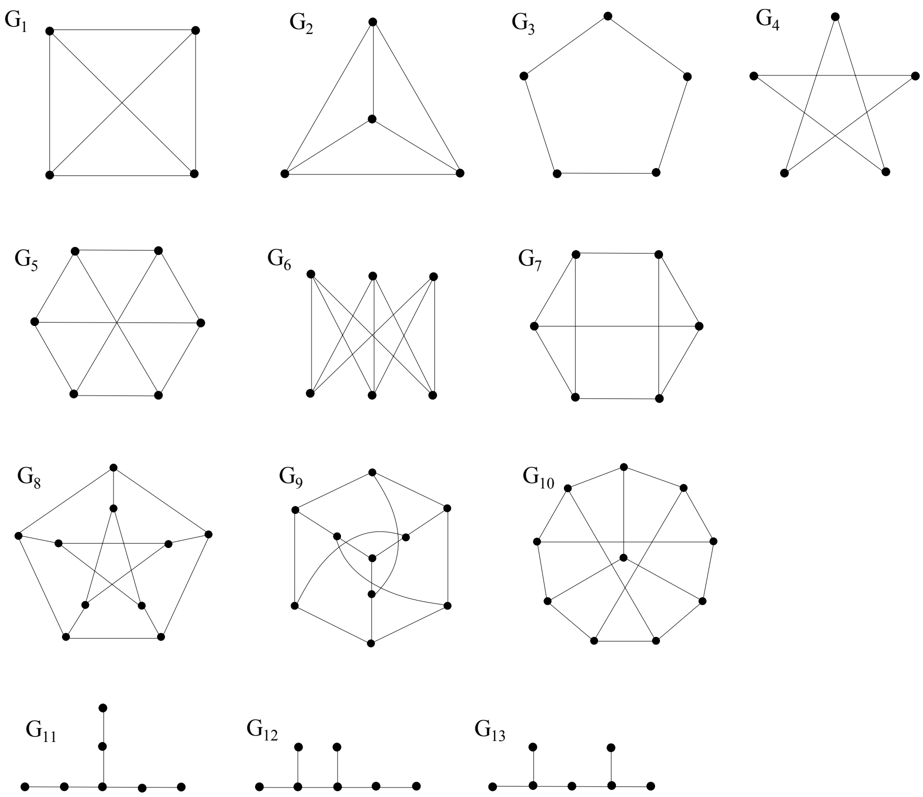
14. Az erdőben 12 törpe él piros vagy kék házikóban. Az év i-edik hónapjában az i-edik törpe felkeresi összes barátját, hogy eldöntse, átfesse-e a saját házát. Akkor és csak akkor fogja átfesteni (pirosról kékre vagy fordítva), ha a barátai (szigorú) többsége más színű házban lakik, mint ő. Ez évről évre így történik. Bizonyítsuk be, hogy egy idő után már senki nem festi át a házikóját! (A barátságok kölcsönösek és nem változnak az idő múlásával, és természetesen nem feltétlenül barátja mindenki mindenkinek.)

15.$^{+}$ Az elmúlt évben a világranglistán nyilvántartott teniszezők átlagosan 30 ellenféllel játszottak a ranglistáról. Mutassuk meg, hogy kiválasztható közülük néhány úgy, hogy ha csak az ezeknek egymás ellen játszott mérkőzéseit nézzük, mindenki legalább 15 másikkal játszott.

16.$^{+}$ A 11.a osztály sakkozni szerető diákjai körmérkőzéses sakktornát rendeztek egymás között. Mindenki mindenkivel egyszer játszott. Az eredmények érdekesen alakultak: a résztvevők közül bármely kettőhöz van legalább egy olyan, akit mindketten legyőztek a tornán. Legalább hányan szeretnek sakkozni a 11.a-ban? [OKTV 2015/2016, II. kat., 1. ford.]

17.$^{+}$ Egy társaságot vegyes társaságnak nevezünk, ha sem olyan nincs benne, aki mindenkit ismer, sem olyan, aki senkit nem ismer. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Bizonyítsuk be, hogy ha egy legalább öttagú társaság vegyes, akkor kiválaszthatók közülük négyen olyanok, akik egymás között vegyes társaságot alkotnak.

18. Az alábbi gráfok közül melyek izomorfak egymással?



19. Legyen $KG(5,2)$ az az egyszerű gráf, amelynek csúcshalmaza $\binom{[5]}{2}$, és két csúcs (kételemű halmaz) pontosan akkor összekötött, ha diszjunktak. Rajzoljuk le a $KG(5,2)$ gráfot, és döntsük el, hogy az előző feladatban szereplő gráfok közül melyekkel izomorf.