

6. REKURZIÓK

1. Hányféleképpen lehet lefedni egy $2 \times n$ -es téglalapot dominókkal (1×2 -es téglalapokkal)?
2. Egy építőjátékunk van, amely piros és kék téglákat tartalmaz. Hányféleképpen lehet ilyen téglákból n magas tornyot építeni, ha nem engedjük meg, hogy két piros téglát szomszédos szintre kerüljön? (A téglák a színektől eltekintve egyformák. Minden szintre egy téglát kerül.)
3. Hányféleképpen lehet az n számot pozitív egészek összegére bontani, ha számít a tagok sorrendje?
4. Hányféleképpen lehet az n számot *páratlan* pozitív egészek összegére bontani, ha számít a tagok sorrendje?
5. n forintunk van. Minden nap pontosan egy dolgot veszünk a következők közül (zárójelben az egységár): percc (1 forint), fagylalt (2 forint), csoki (2 forint). Hányféleképpen költhetjük el a pénzünket? [6.17]
6. Legyen s_n azoknak az n jegyű, csak 0, 1, 2 számjegyeket tartalmazó számoknak a száma, amelyekben bármely két szomszédos számjegy legfeljebb 1-gyel tér el egymástól. Igazoljuk, hogy $n \geq 3$ -ra $s_n = 2s_{n-1} + s_{n-2}$. [6.20]
7. Oldjuk meg a következő lineáris rekurziókat.
 - a) $a_0 = 1, a_1 = 6; a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
 - b) $a_0 = 3, a_1 = 6; a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
 - c) $a_0 = 1, a_1 = 2; a_n = 6a_{n-1} - 7a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
 - d) $a_0 = 1, a_1 = 1; a_n = 4a_{n-1} - 2a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
 - e) $a_0 = 6, a_1 = 8; a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
 - f) $a_0 = 3, a_1 = -3; a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
 - g) $a_0 = 1, a_1 = 1; a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
 - h) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 13; a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3}$ (ha $n \geq 3$).
 - i) $a_0 = 17, a_1 = 14, a_2 = 110; a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$ (ha $n \geq 3$).
8. Adjunk meg egy olyan másodrendű lineáris rekurziót, amelynek a megoldása:

$$a_n = 3 \cdot 5^n + (-4)^n.$$

- 9.⁺ Oldjuk meg a következő rekurziót:

$$a_0 = a_1 = 1; a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 3n + 2^n \text{ (ha } n \geq 2\text{)}.$$

10. Hányféleképpen lehet egy konvex $(n+2)$ -szöget egymást nem metsző átlókkal háromszögekre bontani?
11. Egy kör alakú asztal körül $2n$ -en ülnek. Hányféleképpen alakozhatnak az asztal körül ülők n párt úgy, hogy az egy párban lévők kezét foghassanak anélkül, hogy egy másik kezét fogó pár keze alatt vagy felett át kellene nyúlniuk? (Az asztal felett való átnyúlás megengedett.)
- 12.⁺ Bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} F_k = F_{2n}.$$

Lineáris rekurzió megoldása Wolfram Alphával:

A 7/b. feladat megoldása: `solve a(0)=3, a(1)=6, a(n)=a(n-1)+6a(n-2)`

Kilenc kidolgozott lineáris rekurzió megoldás Hajnal Péter honlapján:

http://www.math.u-szeged.hu/~hajnal/courses/BSc_Kombinatorika/lin_alap.htm