

3. MULTIHALMAZOK, FORMÁLIS HATVÁNSOROK

1. Egy kirándulásra gyümölcskosarat viszünk. Otthon öt alma, két körte, három banán és hat narancs van, ebből kell összeállítanunk a kosarat. Hányféle lehet a kirándulásra vitt gyümölcskosár, ha azt is számoljuk, amikor nem viszünk semmit sem? (Az azonos fajtájú gyümölcsök teljesen egyformák.)
2. Van k fajta gyümölcsünk. Az i -edik fajtából a_i egyforma darab van. A gyümölcsöket két egyforma tálcán szeretnénk két csoportba osztani (üres csoport is megengedett). Hányféle módon tehetjük ezt meg?
3. Hány lehetséges ötöslottóhúzás-kimenetel lenne, ha egy számot többször is kihúzhatnának (és a kihúzott számok sorrendje továbbra sem számítana)?
4. Egy pékségben nyolcfajta fánk kapható. A barátainknak szeretnénk egy doboz fánkot venni, amely 12 fánkot tartalmaz. Hányféleképpen állíthatjuk össze a doboz tartalmát a bolt kínálatából? (Az azonos fajta fánkokat nem különböztetjük meg. A bolt minden rendelést ki tud szolgálni.)
5. Az alábbi egyenletnek hány megoldása van a nemnegatív egészek körében?

$$a + b + c + d = 2022.$$

6. Hányféleképpen oszthatunk el k db (egyforma) egyforintost n (különböző) gyerek között úgy, hogy
 - a) tetszőleges elosztás megengedett;
 - b) mindenki kapjon legalább egyet;
 - c) az i -edik gyerek legalább i forintot kapjon ($i = 1, \dots, n$);
 - d) mindenki páros sok forintot kapjon;
 - e) mindenki páratlan sok forintot kapjon?
7. Cégünknel 20.000 ft bónuszt szeretnénk szétosztani hat dolgozó között. Három dolgozónak olyan szerződése van, hogy legalább 2.000 ft-ot kell kapniuk, a többieknek pedig legalább 1.000 ft-ot. Hányféleképpen oszthatjuk szét a rendelkezésre álló pénzüsszeget, ha mindenki 1.000-rel osztható összeget kap?

8. Oljuk meg a következő problémát, amihez a 2. feladatsor 10. feladatánál jutottunk: A természetes számok körében hány megoldása olyan megoldása van az

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 85$$

egyenletnek, ahol az x_2, x_3, x_4, x_5 változók értéke legalább 1?

9. Hány monoton növekvő $[n] \rightarrow [n]$ függvény van? (Egy f függvény monoton növekvő, ha $x < y$ esetén $f(x) \leq f(y)$.)
10. Mutassuk meg, hogy a $\{0, 1, \dots, 2n + 1\}$ alaphalmaz felett 4^n darab olyan n elemű multihalmaz adható meg, amelyben az $1, 2, \dots, 2n + 1$ elemek multiplicitása legfeljebb 1 (és a 0 elem multiplicitása tetszőleges).
11. Az $(n$ elemű alaphalmaz feletti) M multihalmaz multiplicitásvektora (m_1, \dots, m_n) . Jelölje r_k az M multihalmaz k elemű részmultihalmazainak számát. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k = \prod_{k=1}^n (1 + x + x^2 + \dots + x^{m_k}).$$

12. Hány olyan k elemű multihalmaz van $[2n]$ felett, amelyben $1, 2, \dots, n$ multiplicitása legfeljebb 1, és $n + 1, n + 2, \dots, 2n$ multiplicitásai párosak? [TK. 3.4.7.]

13.⁺ Bizonyítsuk be, hogy $\sum c_1 \dots c_k = \binom{n+k-1}{2k-1}$, ahol az összegezés az összes olyan nemnegatív egészekből álló $\{c_i\}_{i=1}^k$ sorozaton fut végig, amelyre $c_1 + \dots + c_k = n$. [TK. 3.4.11.]

14. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat: [TK. 3.4.13.]

a)
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k-1},$$

b)
$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k},$$

c)
$$\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n-1}{i}.$$

15. Legyen F a páratlan természetes számok generátorfüggvénye, G pedig a $\sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k x^k$ formális hatványsor, vagyis

$$F = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots$$

$$G = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \dots$$

- Számoljuk ki az FG szorzat első négy tagját.
- Számoljuk ki az $\frac{F}{G}$ hányados első négy tagját (az osztás definíciója szerint).
- Írjuk fel G -t zárt alakban, és ebből számoljuk ki $\frac{F}{G}$ pontos értékét.