2. Binomiális együtthatók, polinomok

1. Hány olyan részhalmaza van az $\{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ halmaznak, amely pontosan három egyjegyű számot tartalmaz?

2. Egy raktárban 20 öltöny van, amelyek közt 9 szövési hibákat tartalmaz, a többi hibátlan. Egy kereskedő kiválaszt 15 öltönyt. Hány olyan választási lehetősége van, hogy legfeljebb 5 legyen hibás?

3. Hány olyan hétjegyű telefonszám van, amely 4-essel kezdődik, pontosan 3 db 2-es van benne, és nincs benne 0?

4. A Bolyai Közlekedési Vállalat (BKV) jegyein az alábbi 5×5-ös számtáblázat szerepel:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

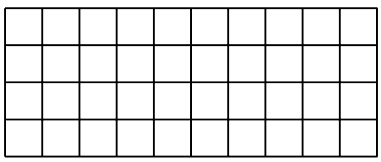
Az előírás szerint a buszon található lyukasztónak tíz számot kell kilyukasztania úgy, hogy minden sorban pontosan kettő legyen kilyukasztva. (Az oszlopokra nincs megkötés.) Hány ilyen lyukasztási mód van?

5. A 32 lapos magyar kártyából egyszerre kihúzunk 6 lapot. Hányféleképpen tehetjük ezt meg úgy, hogy a kihúzott lapok között pontosan két piros lap és pontosan két ász legyen? (A kihúzott lapok sorrendje nem számít.)

6. Hányféleképpen lehet szétosztani az $1, 2, 3, \ldots, 9$ számokat a _ helyekre úgy, hogy a megadott kisebb/nagyobb relációk teljesüljenek?

$$\_ < \_ < \_ < \_ > \_ > \_ > \_ > \_ > \_$$

7. Hány téglalapot határoznak meg az alábbi rács vonalai? [3.4]



8. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai egy adott szabályos 23-szög csúcsai közül valók, és amely tartalmazza a sokszög középpontját? [3.3]

9. Felveszünk 30 különböző pontot a síkon úgy, hogy ne legyen három egy egyenesen. Minden pontot minden ponttal összekötünk, és az összekötő szakaszokat pirossal vagy kékkel színezzük. Minden pontból pontosan 12 kék színű szakasz indul ki, a többi pedig piros. Vizsgáljuk az így kialakult háromszögeket. Ha egy háromszög minden oldala ugyanolyan színű, akkor a belsejét is kiszínezzük. Összesen hány háromszöget színezünk be? [Szakest, 2018]

10. Mi a valószínűsége annak, hogy egy lottóhúzás öt száma között van legalább két szomszédos (azaz két olyan szám, amelynek különbsége 1)? [3.6]

11.$^{+}$ Az 1987. évi 34. heti lottóhúzáskor két pár egymás utáni számot is kihúztak: a $(31, 32)$-t és az $(50, 51)$-et. Mi annak a valószínűsége, hogy a jövő heti húzás eredménye hasonlóan alakul, azaz kihúznak két szomszédos számból álló párt, de nem húznak ki három egymás utáni számot? [3.7]

12. Bizonyítsuk be, hogy bármely $n \geq 2$ természetes számra

$$\frac{2^n}{n} \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \leq \frac{2^n}{\sqrt{n}}.$$

13. Bizonyítsuk be, hogy $n \geq k \geq 1$ esetén

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq \binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k.$$

14. $\binom{90}{5}$ páros vagy páratlan? (A kérdést próbáljuk a $\binom{90}{5}$ binomiális együttható pontos értékének kiszámítása nélkül megválaszolni.)

15. Igazoljuk a következő kongruenciákat (mod 2):

$$\binom{2n}{2k+1} \equiv 0, \quad \binom{2n}{2k} \equiv \binom{n}{k}, \quad \binom{2n+1}{2k} \equiv \binom{n}{k}, \quad \binom{2n+1}{2k+1} \equiv \binom{n}{k}.$$

16. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat: [3.17]

a) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

b) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

c) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0, \quad$ ha $n \geq 1$.

d) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

e) $\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$.

f) $0\binom{n}{0} + 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$.

g) $\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{k}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

h) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

17. Igazoljuk kettős leszámlálással az alábbi ismert összefüggéseket:

a) $$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \binom{n+1}{2}$$

b) $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}$$

18. Hozzuk zárt alakra a következő kifejezést:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 4^k (-1)^{n-k}.$$

19. a) A binomiális tételre való hivatkozás nélkül, kettős leszámlálással bizonyítsuk, hogy minden n és m pozitív egészre teljesül, hogy

$$(m+1)^n = 1 + \binom{n}{1}m + \binom{n}{2}m^2 + \binom{n}{3}m^3 + \cdots + \binom{n}{n}m^n.$$

b) Miért következik az előző pontból a binomiális tétel?

20.$^+$ Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor

$$(5+\sqrt{26})^n$$

tizedestört-alakjában a tizedesvesszőt követő első n jegy egyenlő. [3.21]

21. Írjuk fel egyszerűbb alakban az $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})$ polinomot!

22. Indokoljuk meg, hogy a következő két feladatnak mi köze van egymáshoz, és a b) feladatot az a) feladat felhasználásával oldjuk meg:

a) Határozzuk meg az $(1+x^5+x^{10}+x^{15}+x^{20})(1+x^{10})(1+x^{20}+x^{40})$ polinomszorzás eredményét. Ehhez használhatunk számítógépet. (A honlapomon bemutatom egy példával, hogy hogyan lehet polinomokat szorozni az ingyenes Wolfram Alphaval.)

b) Pénztárcánkban négy 5-forintos, egy 10-forintos, és két 20-forintos van. Milyen összegeket tudunk pontosan kifizetni (tehát úgy, hogy a pénztárosnak ne kelljen visszaadni)? Az egyes kifizetéseknél hány lehetőségünk van?

23.$^+$ Lehetséges-e két dobókockát úgy „cinkelni" (tehát az egyes számok dobásának valószínűségét úgy megváltoztatni), hogy a feldobások után a kapott számokat összeadva 2-től 12-ig minden lehetséges összeg bekövetkezésének valószínűsége azonos legyen? [3.39]

24.$^+$ Azt szeretnénk megtippelni, hogy a kihúzott lottószámok összege páros vagy páratlan lesz-e. Melyik lehetőségnek nagyobb a valószínűsége

a) ötöslottó esetén (90 számból 5-öt húznak ki),

b) hatoslottó esetén (45 számból 6-ot húznak ki),

c) skandináv lottó esetén (35 számból 7-et húznak ki)?

Olyan megoldást adjunk, amely nagy számok esetén is működik (pl. ha 2018 számból húzunk 100-at).