12. Csúcsszínezések, Ramsey-elmélet

1.⁻ Tekintsük a következő G (egyszerű) páros gráfot: G két színosztálya $A = \{u_1, \dots, u_n\}$ és $F = \{v_1, \dots, v_n\}$, és az u_i és v_j csúcsok pontosan akkor összekötöttek, ha $i \neq j$. Színezzük G csúcsait a mohó algoritmussal (ld. előadás) a következő sorrendben: $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_n, v_n$.
a) Hány színt fog kiosztani a mohó algoritmus?
b) Mennyi a G gráf kromatikus száma?

Tanulság: Előfordulhat, hogy a mohó algoritmus a optimálisnál jóval több szín felhasználásával színez (de vö. következő feladat).

2. A mohó színezési algoritmussal kapott jó színezés függ attól, hogy milyen sorrendben haladtunk végig a csúcsokon. Az előző feladatban láttuk, hogy előfordulhat, hogy „szerencsétlen" csúcssorrend esetén az algoritmus a kromatikus számnál több színt használ fel.

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G (egyszerű) gráf esetén létezik a csúcsoknak olyan sorrendje, amely sorrend szerint haladva a mohó algoritmus $\chi(G)$ színt használ fel (azaz optimálisan színez).

Megjegyzés: Tehát elméletileg a kromatikus szám meghatározható úgy, hogy vesszük a csúcsok összes lehetséges sorrendjét, és minden sorrendre lefuttatjuk a mohó algoritmust: a kapott jó színezések között előforduló legkisebb felhasznált színszám lesz a kromatikus szám. Ezzel a módszerrel az a probléma, hogy nagyon lassú, a csúcsok összes lehetséges sorrendje $|V|!$, ami jellemzően óriási szám.

3. (**Hatszín-tétel.**) Az Euler-formula segítségével megmutatható, hogy minden egyszerű síkgráfban van legfeljebb ötödfokú csúcs. (A bizonyítás elolvasható az előadás honlapján.) Ezt felhasználva mutassuk meg, hogy minden egyszerű síkgráf kromatikus száma legfeljebb 6.

4. a) Legyen G egy összefüggő gráf, és v egy tetszőleges csúcsa. Mutassuk meg, hogy G csúcsainak van olyan sorrendje, hogy v az utolsó csúcs, és v-t leszámítva az összes csúcsból vezet él valamely későbbi csúcsba.
b) Igazoljuk, hogy tetszőleges összefüggő, nem reguláris G (egyszerű) gráfra $\chi(G) \leq \Delta(G)$.

5. Legyen G egy *háromszögmentes* gráf, amelynek kromatikus száma k. Konstruálunk G-ből egy G' gráfot a következőképpen: Kiindulásként vegyük a G gráf k darab csúcsdiszjunkt példányát. n^k lehetőségünk van arra, hogy mindegyik példányból kiválasszunk egy csúcsot, ahol n a G csúcsszámát jelöli. Minden ilyen kiválasztáshoz felveszünk egy új csúcsot, amelyet összekötünk a k kiválasztott csúccsal. Így egy $kn + n^k$ pontú gráfhoz jutunk, legyen ez G'. Mutassuk meg, hogy G' is háromszögmentes, és kromatikus száma $k + 1$.

Tanulság: A feladatban leírt operáció tehát megtartja a háromszögmentességet, és 1-gyel növeli a kromatikus számot. Így a (háromszögmentes) K_1 gráfból kiindulva ($G := K_1$) a fenti eljárást ismételgetve a $G, G', G'', G''', \dots$ gráfsorozat gráfjai mind háromszögmentesek, és az i-edik gráf kromatikus száma i. Ezzel bebizonyítottuk, hogy egy háromszögmentes gráf kromatikus száma tetszőlegesen nagy lehet (míg egy háromszögmentes gráf ω paraméterének értéke csak legfeljebb 2, illetve ha van (nemhurok)éle, akkor pontosan 2).

6. a) Egy versenyen $(m - 1)n + 1$ ember szerepel. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük m ember, akik páronként nem ismerik egymást, vagy van egy ember, aki legalább n másikat ismer.
b) Igaz marad-e az állítás, ha eggyel kevesebb ember vesz részt a versenyen? [16.1]

7. Egy n pontú teljes gráf ($n \geq 3$) éleit kiszínezzük két színnel. Bizonyítsuk be, hogy lesz olyan Hamilton-kör, amely teljesen egyszínű, vagy két egyszínű ívből áll. [16.2]

8. Igaz-e, hogy hat irracionális szám között mindig van három olyan, hogy bármely kettő összege irracionális?
Segítség: $R(3) = 6$.

9. 17 ember vesz részt egy partin. Közülük bármelyik kettő vagy nem ismeri egymást, vagy jó barátok, vagy utálják egymást. Igazoljuk, hogy van közöttük 3 olyan ember, akik mind idegenek egymás számára, mind jó barátok, vagy mind utálják egymást.

10. Az n pontú teljes gráf éleit kiszíneztük n színnel, mindegyik színt felhasználva ($n \geq 3$). Mutassuk meg, hogy kialakul „tarka" háromszög, azaz olyan három pontú kör, amelynek 3 éle 3 különböző színt kapott.