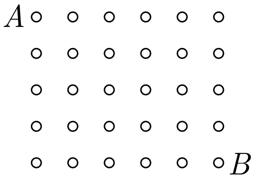
10. Páros gráfok, kromatikus szám

1. Igazoljuk, hogy egy gráf akkor és csak akkor páros, ha nem tartalmaz páratlan kört.

2.$^-$ Mely gráfok párosak a következő gráfok közül? [9.31]

a) K_n, vagyis az n pontú teljes gráf;
b) C_n, vagyis az n pontú kör;
c) S_n, vagyis az n élű csillag;
d) P_n, vagyis az n élű út;
e) H_n, vagyis az n dimenziós kockagráf (lásd 8. feladatsor).

3. Az ábrán látható karikák egy telken lévő gyümölcsfákat jelölik.



Az A-val jelölt fán egy cinke, a B-vel jelölt fán egy rigó ül. Időegységenként mindkét madár a tőle északi, déli, keleti vagy nyugati irányban álló legközelebbi fák egyikére repül. Lehetséges-e, hogy valamikor mindketten ugyanazon a fán ülnek?

4. Egy klubesten tizennégy fő vett részt. Egy játék során mindenki felírta egy cédulára, hogy az est folyamán hány különböző (ellenkező nemű) partnerrel táncolt. A cédulákon rendre a

$$3, 3, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6$$

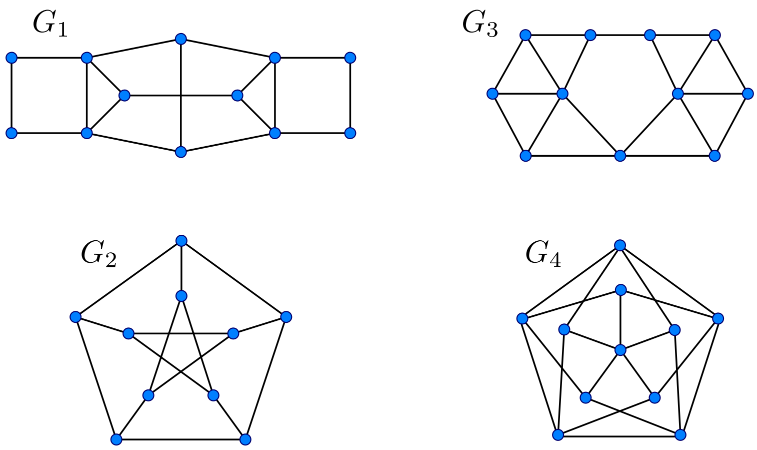
számok szerepeltek. Bizonyítsuk be, hogy valaki tévedett.

5. Határozzuk meg azokat a gráfokat, amelyekben nincs páratlan kör, és izomorfak a komplementerükkel.

6. Mutassuk meg, hogy tetszőleges hurokélmentes gráfból páros gráfot kaphatunk legfeljebb az élek felének elhagyásával.

7.$^+$ Igazoljuk, hogy tetszőleges hurokélmentes gráfból alkalmas élek elhagyásával olyan páros gráfot kaphatunk, melyben minden csúcs foka legalább az eredeti fokszámának fele. (Ebből következik az előző feladat is.)

8. Határozzuk meg az ábrán látható gráfok kromatikus számát: [13.5]



9. Vegyünk egy 4 hosszú kört és egy 5 hosszú kört (melyek csúcsdiszjunktak). A 4 hosszú kör minden pontját kössük össze az 5 hosszú kör összes pontjával. Mennyi az így kapott (9 pontú) gráf kromatikus száma?

10. Definiáljuk a következő egyszerű gráfot: A gráf csúcsai egy sakktábla mezői, és két csúcs (mező) pontosan akkor összekötött, ha egy király egyikről a másikra léphet szabályos lépéssel. Mennyi a kapott gráf kromatikus száma? [13.6]

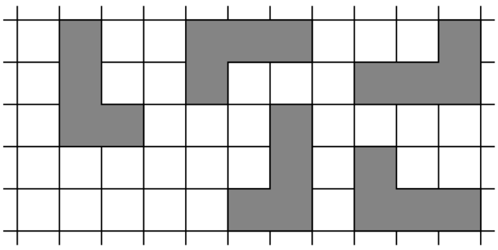
11. A G gráf csúcshalmaza $\{1, \ldots, 100\}$, és két különböző csúcs (szám) pontosan akkor összekötött, ha relatív prímek. Igazoljuk, hogy $\chi(G) = \pi(100) + 1$, ahol $\pi(100)$ jelöli azt, hogy hány prímszám van 1-től 100-ig.

12. Az $\{1, \ldots, 100\}$ csúcshalmazon egy egyszerű gráfot definiálunk: Legyen két különböző csúcs (szám) pontosan akkor összekötött, ha egyik osztja a másikat. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát. [13.8]

13. Adott a síkon néhány egyenes úgy, hogy semelyik három nem halad át közös ponton. A keletkező metszéspontok alkotják a G gráf csúcshalmazát, és két csúcs pontosan akkor összekötött G-ben, ha szomszédos metszéspontok valamelyik egyenesen. Igazoljuk, hogy G kromatikus száma legfeljebb 3. [13.22]
Segítség: Egy alkalmas sorrendben haladva színezzük mohó módon a csúcsokat.

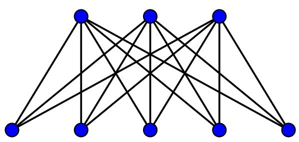
14. A $KG(n, k)$ Kneser-gráf csúcshalmaza $\binom{[n]}{k}$, és két csúcs (részhalmaz) pontosan akkor összekötött, ha diszjunktak. Mutassuk meg, hogy $n \geq 2k$ esetén $\chi(KG(n, k)) \leq n - 2k + 2$.
Megjegyzés: Lovász László topológiai érveléssel igazolta, hogy valójában egyenlőség teljesül.

15.$^+$ Mi az a minimális színszám, ahány színnel ki lehet színezni a (végtelen) négyzetrács mezőit úgy, hogy bárhogy rakunk le „L-alakot” (lásd ábra), az négy különböző színű mezőt takarjon le?



Néhány definíció

- A $K_{m,n}$ **teljes páros gráfon** azt az (egyszerű) páros gráfot értjük, amelynek egyik színosztálya m pontú, másik színosztálya n pontú, és a két osztály között az összes lehetséges él be van húzva (tehát az A színosztály minden pontja össze van kötve az F színosztály összes pontjával).



$K_{3,5}$