

5. LOGIKAI SZITA

1. Egy választás előtti közvélemény-kutatás bejelenti, hogy arra az eredményre jutott, hogy az A , B , illetve C párttal a megkérdezettek rendre 65%, 57%, illetve 58%-a szimpatizál. Továbbá, 28% számára szimpatikus mind A , mind B , 30% számára szimpatikus mind A , mind C , és 27% számára szimpatikus mind B , mind C . Végül a megkérdezettek 12%-a mindhárom párttal szimpatizál. Mi a véleményünk erről a bejelentésről?

2. Hány olyan sorbaállítása van az angol ábécé 26 betűjének, mely egymás utáni három betűként a LOM, HOZ és ZAB szavak egyikét sem tartalmazza?

3. Hányféleképpen jelölhetünk ki egy konvex, n oldalú sokszög csúcsai közül hármat úgy, hogy semelyik kettő se legyen szomszédos? [7.9]

4. Hány olyan n -nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amelynek minden prímosztója legalább kétjegyű? [7.7]

5. Hányféleképpen lehet a 3×3 -as négyzet kilenc mezőjét pirosra és kékre színeznél úgy, hogy semelyik 2×2 -es résznégyzet (a sarkoknál) ne legyen teljesen piros? [A mezők meg vannak különböztetve, például meg vannak számozva 1-től 9-ig.]

6. Hányféleképpen lehet 10 lapot kiválasztani az 52 lapos franciakártya-csomagból úgy, hogy a kiválasztott lapok között mind a négy szín előforduljon?

7. Egy pékség négyféle zsemlét árul: mákosat, szezámmagosat, bajort és normált. Az egyes fajtákból rendre 3, 4, 5 és 6 darab van a boltban. 12 zsemlét szeretnénk venni. Hányféleképpen állíthatjuk össze a rendelést?

8. (Vö. I/16. feladat.) Hány olyan hétjegyű szám van, amely csak 1, 2 és 5 számjegyeket tartalmaz (mindegyiket legalább egyszer)?

9. Hány olyan tízjegyű telefonszám van, amelyben mindegyik páratlan számjegy előfordul legalább egyszer? (A telefonszámokra nincs semmilyen megkötés, például a 0000000000 is egy telefonszám.)

10. Hány szürjektív $[n] \rightarrow [k]$ leképezés van?

Segítség: A feladat így is megfogalmazható [miért?]: Hány olyan n hosszú sorozat készíthető az $1, 2, \dots, k$ számokból, amely tartalmazza az összes számot 1-től k -ig legalább egyszer?

11. Jelölje $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ azt a számot, hogy egy n elemű halmazt hányféleképpen lehet k darab (nem-üres) halmazra partíciónálni. (Például $\left\{ \begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 3$, mert az $\{1, 2, 3\}$ halmaznak 3 db 2 osztályból álló partíciónálása van: $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$ és $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$.) Bizonyítsuk be, hogy

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

Megjegyzés: Az $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ számokat másodfajú Stirling-számoknak nevezzük.

12. Legyen $\phi(n)$ az n -nél nem nagyobb, n -hez relatív prím pozitív egészek száma. Mutassuk meg, hogy ha n prímtényezőssé felbontása $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, akkor

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \quad [7.5]$$

13. (Elcserélt levelek problémája.) Valaki n levelet ír, és megcímezi a hozzájuk tartozó n borítékot, majd a leveleket véletlenszerűen a borítékokba teszi.

- Hányféleképpen fordulhat elő, hogy egyik levél sem a saját borítékjába kerül?
- Hányféleképpen fordulhat elő, hogy pontosan k levél kerül a saját borítékjába?

14. Egy gálavacsorán n házaspár vesz részt. Mind a $2n$ jelenlévő egy pohárköszöntőt mond az este folyamán. Hányféle sorrendben lehet megtartani a pohárköszöntőket úgy, hogy semelyik házaspár két tagja ne következzen (közvetlenül) egymás után?

15. Hányféleképpen lehet egy n elemű halmazt k darab különböző, m elemű részhalmazával lefedni? [7.8]

16.⁺ Hány olyan $\pi : [n] \rightarrow [n]$ permutáció van, amelyre $\pi(i+1) - \pi(i) \neq 1$ teljesül minden i -re ($1 \leq i \leq n-1$)?

17.⁺ Hányféleképpen ülhet le n házaspár egy kör alakú asztal mellé úgy, hogy a férfiak és nők felváltva üljenek, de senki se üljön a házastársa mellett? (A székek meg vannak számozva.)

18. Bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$\sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq n < k; \\ n!, & \text{ha } n = k. \end{cases} \quad [7.13]$$

19. Bizonyítsuk be, hogy $m, n \geq 1$ esetén

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{m}{k} \binom{m-k}{n-k} = 0. \quad [7.15]$$

20. Bizonyítsuk be, hogy $m, n \geq 1$ esetén

$$\sum_{k=0}^m (-1)^k \binom{m}{k} \binom{m+n-k-1}{n-k} = 0. \quad [7.16]$$