4. Sorbaállítások, átrendezések

1. $^-$ Hányféleképpen lehet n bástyát elhelyezni az $n\times n$-es sakktáblán úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást?

2. $^-$ Hányféleképpen ülhet le egy kör alakú asztalhoz hét ember? (Két ülésmódot nem tekintünk különbözőnek, ha mindenkinek ugyanaz a két szomszédja.) [4.29]

3. $^-$ Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt. A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnevűek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé?

4. Hányféleképpen állhat be n vásárló egy bolt k pénztárához fizetni? (A vásárlókat és a pénztárakat is megkülönböztetjük.) [TK. 3.4.8.]

5. Tekintsük azon négyjegyű számokat, melyek minden jegye különböző. Mennyi ezeknek a számoknak az összege?

6. Hány olyan sorbaállítása van az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak, hogy az első helyen álló szám kivételével minden másik i számra igaz, hogy $i-1$ vagy $i+1$ az i előtt áll vahahol?

7. Hányféleképpen lehet a MATEMATIKA szó betűit leírni úgy, hogy a kialakult szóban az *első* M betű a 6. helyen álljon? (Például egy ilyen szó az AKIETMAAMT.)

8. Hányféleképpen lehet leírni a MISSISSIPPI szó betűit úgy, hogy a négy S betű ne kerüljön egymás mellé? [4.13]

9. Hányféleképpen lehet leírni a KOMBINATORIKA szó betűit úgy, hogy a B és M betűk ne kerüljenek egymás mellé?

10. n különböző pár zoknit rakunk be egy mosógépbe. A mosás után a zoknikat egyesével húzzuk ki a mosógépből. Hányféle kihúzási sorrend esetén lesz az i-edik kihúzott zokni az, amelyik az első párt fejezi be? [4.22]

11. Hány nullára végződik a $((3!)!)!$ szám? [4.6]

12. $^+$ Bizonyítsuk be az $(n!)^{n+1}|(n^2)!$ oszthatóságot, lehetőleg kombinatorikus úton. [4.8]

13. Legyen $p_n(k)$ egy n elemű halmaz pontosan k fixponttal rendelkező permutációinak száma. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=0}^{n} kp_n(k) = n!$. [4.11]

14. $^+$ Bizonyítsuk be Wilson tételét, mely szerint tetszőleges p prímszámra $p|(p-1)!+1$. *Segítség:* Számoljuk meg, hogy egy szabályos p-szög csúcsai között hány körút tervezhető úgy, hogy minden csúcson pontosan egyszer megyünk keresztül, ha az elforgatással egymásba vihető körutakat nem különböztetjük meg. [4.31]

15. Bizonyítsuk be a trinomiális tételt.

16. $^-$ Írjuk fel az $(x+y+z)^3$ polinom kifejtett alakját (a zárójelek felbontása után).

17. $^-$ a) Mennyi az $x^{10}y^{70}z^{20}$ monom együtthatója az $(x+y+z)^{100}$ polinomban?
b) És az $x^{10}y^{20}z^{30}$ monomé?

18. $^-$ Tekintsük az alábbi $\pi\colon [8] \to [8]$ permutációt:

$$\pi(1) = 4,\ \pi(2) = 1,\ \pi(3) = 3,\ \pi(4) = 6,\ \pi(5) = 8,\ \pi(6) = 2,\ \pi(7) = 5,\ \pi(8) = 7.$$

(Természetesen π-re gondolhatunk a `41368257` sorbaállításként is.) Határozzuk meg π inverziószámát és π ciklusainak számát!

19. Határozzuk meg az $i(n, 0)$, $i(n, 1)$, $i(n, 2)$, $i(n, \binom{n}{2}-1)$ és $i(n, \binom{n}{2})$ értékeket! [TK. 4.7.4.]

20. Bizonyítsuk be, hogy $i(n, k) = i(n, \binom{n}{2} - k)$.

21. Igazoljuk, hogy tetszőleges $\pi \in S_n$ permutáció esetén $\mathrm{inv}(\pi) = \mathrm{inv}(\pi^{-1})$.

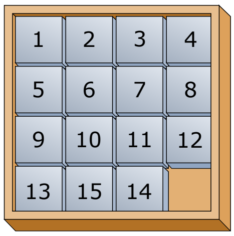
22. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 2$, akkor az $[n]$ halmaznak ugyanannyi páros permutációja van, mint páratlan. (Egy permutációt **párosnak** nevezünk, ha az inverziószáma páros, illetve **páratlannak**, ha az inverziószáma páratlan.)

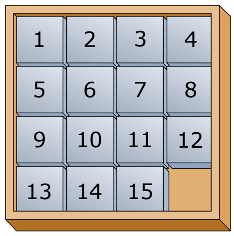
23.$^+$ a) Bizonyítsuk be, hogy ha egy $\pi \in S_n$ sorbaállításban két elemet megcserélünk, akkor π (inverziószámának) paritása megváltozik.

b) Nem nehéz látni, hogy az $1, \ldots, n$ elemek tetszőleges π sorbaállításából megkapható az `123...n` sorbaállítás transzpozíciók végrehajtásával, ahol transzpozíció alatt két elem megcserélését értjük. Bizonyítsuk be, hogy ha π páros, akkor ez a műveletsor mindig páros sok transzpozícióból (cseréből) áll, míg ha π páratlan, akkor páratlan sokból.

Megjegyzés: A feladat b) része azt mutatja, hogy egy $\pi \in S_n$ permutáció paritása meghatározható úgy is, hogy π-t transzpozíciókkal átalakítjuk az `123...n` sorbaállítássá valahogy, és a végrehajtott transzpozíciók számának paritása megadja π paritását.

24.$^+$ A jól ismert tili-toli játék gyártásába hiba csúszott, és a bal oldali ábrán látható játék készült el (a 14 és 15 számok fel lettek cserélve). Bizonyítsuk be, hogy ebből a kiinduló helyzetből nem érhető el a jobb oldali ábrán látható szokásos sorrend.





Segítség: Használjuk az előző feladatot.

25.$^+$ Egy börtönben 100 rab raboskodik. A gonosz börtönigazgató a következőt hirdeti ki a raboknak: „Egy óra múlva minden rab homlokára felírok egy valós számot; ezek között nem lesz két egyforma. Mindenki látja majd a többiek számait, de a sajátját nem. Ezután kaptok egy kis gondolkodási időt, és mindenkinek választania kell egy piros vagy kék sapkát. Persze egymás választásait nem láthatjátok, és kommunikálni tilos a játék alatt. Utána a homlokotokra írt számok nagyság szerinti sorrendje szerint felsorakoztatlak bennetek, és ha két szomszédos emberen azonos színű sapkát látok, akkor mindenkinek meghosszabbodik a büntetése 5 évvel.” Milyen stratégiát találjanak ki a rabok a hátralévő egy órában, ha el akarják kerülni a büntetést?

26. Véletlenül választunk egy permutációt S_n-ből. Mi annak a valószínűsége, hogy az 1 elemet tartalmazó ciklus hossza k?

27. Véletlenül választunk egy permutációt S_n-ből. Mi annak a valószínűsége, hogy az 1 és 2 elemek ugyanabban a ciklusban lesznek?

28. Hány olyan permutációja van $[n]$-nek, amelyben minden ciklus hossza 2?

29. Hány olyan permutációja van $[n]$-nek, amelyben minden ciklus hossza páros?

30.$^+$ Mennyi a ciklusok száma S_n permutációiban összesen?

31. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben ugyanannyi páros sok ciklust tartalmazó permutáció van, mint páratlan sok ciklust tartalmazó!

32.$^+$ Egy városban csak két család közötti lakáscserét lehet elvégezni (több családot érintő lakáscsere tilos), és egy család egy nap csak egyszer költözhet. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges lakáscsere elvégezhető két nap alatt. [4.44]