3. Multihalmazok, formális hatványsorok

1.$^-$ Egy kirándulásra gyümölcskosarat viszünk. Otthon öt alma, két körte, három banán és hat narancs van, ebből kell összeállítanunk a kosarat. Hányféle lehet a kirándulásra vitt gyümölcskosár, ha azt is számoljuk, amikor nem viszünk semmit sem? (Az azonos fajtájú gyümölcsök teljesen egyformák.)

2.$^-$ Hány lehetséges ötöslottóhúzás-kimenetel lenne, ha egy számot többször is kihúzhatnának (és a kihúzott számok sorrendje továbbra sem számítana)?

3.$^-$ Egy pékségben nyolcfajta fánk kapható. A barátainknak szeretnénk egy doboz fánkot venni, amely 12 fánkot tartalmaz. Hányféleképpen állíthatjuk össze a doboz tartalmát a bolt kínálatából? (Az azonos fajta fánkokat nem különböztetjük meg. A bolt minden rendelést ki tud szolgálni.)

4. Az alábbi egyenletnek hány megoldása van a nemnegatív egészek körében?

$$a + b + c + d = 2021.$$

5. Hányféleképpen oszthatunk el k db (egyforma) egyforintost n (különböző) gyerek között úgy, hogy

a) tetszőleges elosztás megengedett;
b) mindenki kapjon legalább egyet;
c) az i-edik gyerek legalább i forintot kapjon ($i = 1, \dots, n$);
d) mindenki páros sok forintot kapjon;
e) mindenki páratlan sok forintot kapjon?

6. Cégünknél 20.000 ft bónuszt szeretnénk szétosztani hat dolgozó között. Három dolgozónak olyan szerződése van, hogy legalább 2.000 ft-ot kell kapniuk, a többieknek pedig legalább 1.000 ft-ot. Hányféleképpen oszthatjuk szét a rendelkezésre álló pénzösszeget, ha mindenki 1.000-rel osztható összeget kap?

7. Oljuk meg a következő problémát, amihez a 2. feladatsor 10. feladatánál jutottunk: A természetes számok körében hány megoldása olyan megoldása van az

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 85$$

egyenletnek, ahol az x_2, x_3, x_4, x_5 változók értéke legalább 1?

8. Van k fajta gyümölcsünk. Az i-edik fajtából a_i egyforma darab van. A gyümölcsöket két egyforma tálcán szeretnénk két csoportba osztani (üres csoport is megengedett). Hányféle módon tehetjük ezt meg?

9. Hány monoton növő $[n] \to [n]$ függvény van? (Egy f függvény monoton növő, ha $x < y$ esetén $f(x) \leq f(y)$.)

10. Mutassuk meg, hogy a $\{0, 1, \dots, 2n + 1\}$ alaphalmaz felett 4^n darab olyan n elemű multihalmaz adható meg, amelyben az $1, 2, \dots, 2n + 1$ elemek multiplicitása legfeljebb 1 (és a 0 elem multiplicitása tetszőleges).

11. Az (n elemű alaphalmaz feletti) M multihalmaz multiplicitásvektora $(m_1, \dots, m_n)$. Jelölje r_k az M multihalmaz k elemű részmultihalmazainak számát. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k = \prod_{k=1}^{n} (1 + x + x^2 + \cdots + x^{m_k}).$$

12. Hány olyan k elemű multihalmaz van $[2n]$ felett, amelyben $1, 2, \dots, n$ multiplicitása legfeljebb 1, és $n + 1, n + 2, \dots, 2n$ multiplicitásai párosak? [TK. 3.4.7.]

13.$^+$ Bizonyítsuk be, hogy $\sum c_1 \dots c_k = \binom{n+k-1}{2k-1}$, ahol az összegezés az összes olyan nemnegatív egészekből álló $\{c_i\}_{i=1}^k$ sorozaton fut végig, amelyre $c_1 + \dots + c_k = n$. [TK. 3.4.11.]

14. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat: [TK. 3.4.13.]

a) $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right)$,

b) $\left(\!\!\binom{2n}{n}\!\!\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right)\left(\!\!\binom{n}{n-k}\!\!\right)$,

c) $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \sum_{i=0}^{k} \left(\!\!\binom{n-1}{i}\!\!\right)$.

15. Legyen F a páratlan természetes számok generátorfüggvénye, G pedig a $\sum_{k=0}^{\infty}(-2)^k x^k$ formális hatványsor, vagyis

$$F = 1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots$$
$$G = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \dots$$

a) Számoljuk ki az FG szorzat első négy tagját.
b) Számoljuk ki az $\frac{F}{G}$ hányados első négy tagját (az osztás definíciója szerint).
c) Írjuk fel G-t zárt alakban, és ebből számoljuk ki $\frac{F}{G}$ pontos értékét.