## 5. Logikai szita

**1.**$^{-}$ Egy osztály 30 tanulója közül a matematikát 12-en, a fizikát 14-en, a kémiát pedig 13-an szeretik. Öt tanuló a matematikát és a fizikát is, hét a fizikát és a kémiát is, négy a matematikát és a kémiát is szereti; hárman vannak, akik mindhárom tárgyat szeretik. Hányan vannak, akik nem szeretik egyiket sem a három tárgy közül? [7.1]

**2.**$^{-}$ Egy választás előtti közvélemény-kutatás bejelenti, hogy arra az eredményre jutott, hogy az $A$, $B$, illetve $C$ párttal a megkérdezettek rendre 65%, 57%, illetve 58%-a szimpatizál. Továbbá, 28% számára szimpatikus mind $A$, mind $B$, 30% számára szimpatikus mind $A$, mind $C$, és 27% számára szimpatikus mind $B$, mind $C$. Végül a megkérdezettek 12%-a mindhárom párttal szimpatizál. Mi a véleményünk erről a bejelentésről?

**3.** Hány olyan sorbaállítása van az angol ábécé 26 betűjének, mely egymás utáni három betűként a LOM, HOZ és ZAB szavak egyikét sem tartalmazza?

**4.** Hányféleképpen jelölhetünk ki egy konvex, $n$ oldalú sokszög csúcsai közül hármat úgy, hogy semelyik kettő se legyen szomszédos? [7.9]

**5.** Hány olyan $n$-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amelynek minden prímosztója legalább kétjegyű? [7.7]

**6.** Hányféleképpen lehet 10 lapot kiválasztani az 52 lapos franciakártya-csomagból úgy, hogy a kiválasztott lapok között mind a négy szín előforduljon?

**7.** Egy pékség négyféle zsemlét árul: mákosat, szezámmagosat, bajort és normált. Az egyes fajtákból rendre 3, 4, 5 és 6 darab van a boltban. 12 zsemlét szeretnénk venni. Hányféleképpen állíthatjuk össze a rendelést?

**8.** (Vö. I/16. házi feladat.) Hány olyan hétjegyű szám van, amely csak 1, 2 és 5 számjegyeket tartalmaz (mindegyiket legalább egyszer)?

**9.** Hány olyan tízjegyű telefonszám van, amelyben mindegyik páratlan számjegy előfordul legalább egyszer? (A telefonszámokra nincs semmilyen megkötés, például a 0000000000 is egy telefonszám.)

**10.** Hány *szürjektív* $[n] \to [k]$ leképezés van?

*Segítség:* A feladat így is megfogalmazható [miért?]: Hány olyan $n$ hosszú sorozat készíthető az $1, 2, \ldots, k$ számokból, amely tartalmazza az összes számot 1-től $k$-ig legalább egyszer?

**11.** Jelölje $\left\{ n \atop k \right\}$ azt a számot, hogy egy $n$ elemű halmazt hányféleképpen lehet $k$ darab (nemüres) halmazra partícionálni. (Például $\left\{ 3 \atop 2 \right\} = 3$, mert az $\{1, 2, 3\}$ halmaznak 3 db 2 osztályból álló partícionálása van: $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$ és $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$.) Bizonyítsuk be, hogy

$$\left\{ n \atop k \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

*Megjegyzés:* Az $\left\{ n \atop k \right\}$ számokat *másodfajú Stirling-számoknak* nevezzük.

**12.** Legyen $\phi(n)$ az $n$-nél nem nagyobb, $n$-hez relatív prím pozitív egészek száma. Mutassuk meg, hogy ha $n$ prímtényezős felbontása $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}$, akkor

$$\phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right). \qquad [7.5]$$

**13.** (Elcserélt levelek problémája.) Valaki $n$ levelet ír, és megcímezi a hozzájuk tartozó $n$ borítékot, majd a leveleket véletlenszerűen a borítékokba teszi.

a) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy egyik levél sem a saját borítékjába kerül?

b) Hányféleképpen fordulhat elő, hogy pontosan $k$ levél kerül a saját borítékjába?

**14.** Egy gálavacsorán $n$ házaspár vesz részt. Mind a $2n$ jelenlévő egy pohárköszöntőt mond az este folyamán. Hányféle sorrendben lehet megtartani a pohárköszöntőket úgy, hogy semelyik házaspár két tagja ne következzen (közvetlenül) egymás után?

**15.** Hányféleképpen lehet egy $n$ elemű halmazt $k$ darab különböző, $m$ elemű részhalmazával lefedni? [7.8]

**16.**$^+$ Hány olyan $\pi : [n] \to [n]$ permutáció van, amelyre $\pi(i+1) - \pi(i) \neq 1$ teljesül minden $i$-re ($1 \leq i \leq n-1$)?

**17.**$^+$ Hányféleképpen ülhet le $n$ házaspár egy kör alakú asztal mellé úgy, hogy a férfiak és nők felváltva üljenek, de senki se üljön a házastársa mellett? (A székek meg vannak számozva.)

**18.** Bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 \leq n < k; \\ n!, & \text{ha } n = k. \end{cases} \qquad [7.13]$$

**19.** Bizonyítsuk be, hogy $m, n \geq 1$ esetén

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{m-k}{n-k} = 0. \qquad [7.15]$$

**20.** Bizonyítsuk be, hogy $m, n \geq 1$ esetén

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{m+n-k-1}{n-k} = 0. \qquad [7.16]$$