

## 1. ZÁRTHELYI DOLGOZAT

1. A kombinatorika gyakorlatra 3 fiú és 7 lány jár. Hányféleképpen lehet a 10 hallgató közül 4 főt kiválasztani úgy, hogy legyen közöttük fiú is és lány is?
2. Egy számokból álló véges  $M$  halmazra jelölje  $S(M)$  az  $M$  elemeinek összegét. Mekkora az  $S(M)$  összegek összege, ha  $M$  befutja az  $\{1, 2, \dots, 10\}$  halmaz összes (nemüres) részalmazát?
3. Legyen  $n \geq k$ . Hányféleképpen állhat be  $n$  vásárló egy bolt  $k$  pénztárához fizetni úgy, hogy egyik pénztár se maradjon üresen?
4. Igazoljuk, hogy  $n \geq 2$  esetén az  $\{1, \dots, n\}$  halmaz azon permutációinak száma, amelyekre az 1 és 2 elemek ugyanabban a ciklusban vannak,  $\frac{n!}{2}$ .  
*Segítség:* A megszámlalható permutációk között hány olyan van, amelyben a szóban forgó közös ciklus hossza  $k$ ? (Másképp elindulva is megoldható a feladat.)
5. Hozzuk zárt alakra a következő kifejezést:

$$\sum_{k=0}^{50} (-1)^k \binom{2014}{k} \binom{2014}{50-k}.$$

*Segítség:* Tekintsük a  $\sum_{k=0}^{2014} (-1)^k \binom{2014}{k} x^k$  és  $\sum_{j=0}^{2014} \binom{2014}{j} x^j$  polinomok szorzatát.

- 6.<sup>+</sup> Hányféleképpen lehet egy  $n$  elemű halmazt  $k$  darab különböző,  $m$  elemű részalmazával lefedni?

*Minden feladat teljes megoldása 5 pontot ér.*

*Jó munkát!*