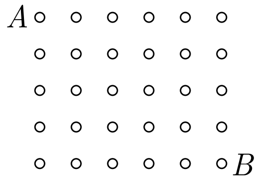
9. Komponensek, utak, körök

1.$^-$ Körszerűen elhelyezünk 14 csúcsot, és a negyedszomszédosakat összekötjük. Hány komponense lesz a kapott gráfnak?

2.$^-$ Az ábrán látható karikák egy telken lévő gyümölcsfákat jelölik.



Az A-val jelölt fán egy cinke, a B-vel jelölt fán egy rigó ül. Mindkét madár az egyik fáról csak a legközelebbi ÉNy-i, ÉK-i, DNy-i vagy DK-i irányban lévő fák egyikére repül. Lehetséges-e, hogy valamikor mindkettő ugyanazon a fán ül?

3.$^-$ Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább n, akkor a gráf összefüggő.

4.$^-$ Bizonyítsuk be, hogy ha egy G összefüggő gráf egy köréből elhagyunk egy élt, akkor a maradék gráf is összefüggő lesz.

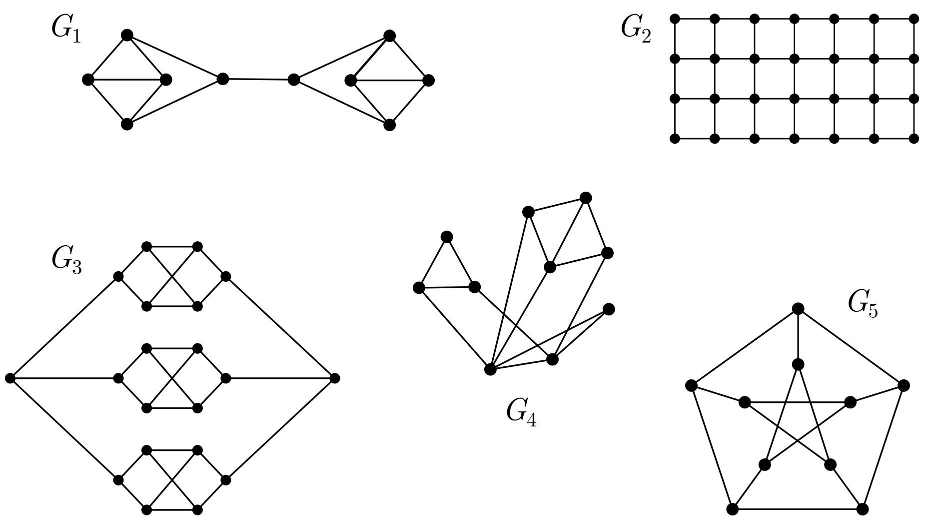
5.$^-$ Igazoljuk, hogy ha egy gráfban minden pont foka legalább 2, akkor a gráf tartalmaz kört.

6. A G egyszerű gráfban minden pont foka legalább δ.
a) Bizonyítsuk be, hogy G-ben van (legalább) δ hosszú út.
b) Bizonyítsuk be, hogy ha $\delta \geq 2$, akkor létezik G-ben δ-nál hosszabb kör. (Ebből következik az előző feladat is.)

7. Bizonyítsuk be a következőket:
a) Ha egy gráf 2-reguláris, akkor minden komponense kör.
b) Ha egy gráfban minden pont foka legfeljebb 2, akkor a gráfnak minden komponense út vagy kör (ahol az út komponens 1 pontú, azaz izolált csúcs is lehet).
Megjegyzés. Ezek „akkor és csak akkor” állítások, csak a másik irány nyilvánvaló.

8. Legyen G egy olyan gráf, amelyben minden csúcs fokszáma páros. Bizonyítsuk be, hogy G élhalmaza körök élhalmazainak diszjunkt uniója. [TK. 4.1.12.]

9. Döntsük el, hogy az alábbi gráfokban van-e Hamilton-út, Hamilton-kör:



10. Az előző feladat G_2 gráfjának mintájára definiálhatjuk a négyzetrács-gráfokat (a G_2 a 4×7-es négyzetrács-gráf). Mely m, n-ekre van Hamilton-kör az $m\times n$-es négyzetrács-gráfban?

11. a) 12 ember vesz részt egy vacsorán. Mindenki legalább 6 embert ismer a társaságból. (Az ismeretségek kölcsönösek.) Bizonyítsuk be, hogy le tudnak úgy ülni egy kör alakú asztal mellé, hogy mindenki ismeri a két szomszédját.
b) Késve megérkezik András, aki legalább 7 embert ismer a jelenlévők közül. Igazoljuk, hogy Andrással együtt a 13 ember le tud ülni az előzőek szerint.
c) Akkor is tudnánk-e ezt, ha András csak 6 embert ismerne?

12. Van-e Hamilton-kör a H_n hiperkockagráfban (ld. előző feladatsor)?

13. Bejárható-e a 4×4-es sakktábla lóugrásokkal úgy, hogy minden mezőre egyszer lépünk?

14. Egy 3×3×3 méretű sajtkocka 27 kis kockából áll. Egy egér a kis kockákat egyesével tervezi elfogyasztani úgy, hogy egy kis kocka után mindig olyan kocka következzen, amelyiknek az épp elfogyasztottal van közös lapja. Az egér az egyik sarokból kezdi a lakomát. El tudja-e fogyasztani a teljes sajtot út, hogy utoljára olyan kockát fogyasszon, aminek van közös lapja az elsővel?

15. A $KG(16,3)$ Kneser-gráf csúcshalmaza $\binom{[16]}{3}$, és két csúcs (részhalmaz) pontosan akkor összekötött, ha diszjunktak. Mutassuk meg, hogy $KG(16,3)$-ban van Hamilton-kör.

16. Igazoljuk, hogy ha egy $2n+1$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább n, akkor a gráf tartalmaz Hamilton-utat. (Vezessük vissza a Dirac-tételre a feladatot.)

17. (Rédei tétele.) Igazoljuk, hogy K_n bármely irányításában van irányított Hamilton-út. Igaz-e, hogy mindig van Hamilton-kör is?

18.$^+$ Egy társaságban néhányan korábbról már ismerik egymást, de nem mindenki ismer mindenkit. Minden este a társaság egyik tagja meghívja az összes (aktuális) ismerősét a társaságból egy partira, ahol bemutatja őket egymásnak. Tegyük fel, hogy már mindenki tartott legalább egy ilyen partit, de Anna és Béla még nem ismerősök. Igazoljuk, hogy ők a következő partin sem lesznek bemutatva egymásnak.