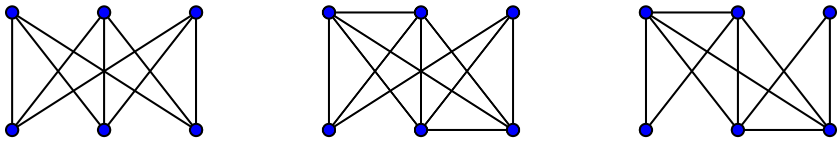
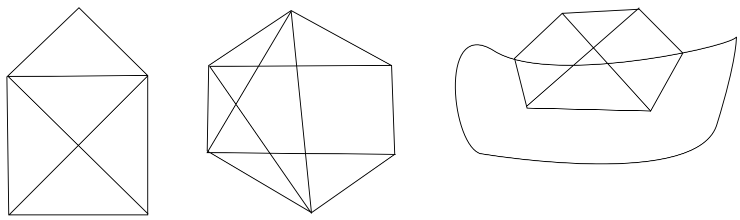
8. Séta, vonal, út

1.$^-$ Az alábbi gráfok közül melyekben van nyílt, illetve zárt Euler-vonal? (Ha van, akkor adjuk is meg.)



2.$^-$ A G egyszerű csúcshalmaza $\{1, \ldots, 100\}$, továbbá az i és j csúcsok pontosan akkor összekötöttek, ha $1 \leq |i - j| \leq 2$. Van-e nyílt, illetve zárt Euler-vonal G-ben? (Ha igen, adjuk is meg.)

3.$^-$ Az alábbi három alakzat közül melyek rajzolhatók le a ceruza felemelése nélkül úgy, hogy minden vonalat egyszer és csak egyszer húzunk meg?



4. a) A H_n egyszerű gráf csúcsai az n hosszú 0-1 (bit)sorozatok ($n \geq 1$), és két csúcs pontosan akkor összekötött, ha a megfelelő bitsorozatok (pontosan) egy bitben térnek el. Van-e Euler-vonal H_n-ben? (Ezt a H_n gráfot az n dimenziós (hiper)kockagráfnak nevezik.)

b) A $\widetilde{H}_n$ gráf csúcshalmaza ugyanaz, mint H_n csúcshalmaza, és $\widetilde{H}_n$-ben két csúcs pontosan akkor összekötött, ha két bitben térnek el. Van-e Euler-vonal $\widetilde{H}_n$-ben?

5. Bizonyítsuk be, hogy minden összefüggő gráf bejárható zárt sétával úgy, hogy minden élen pontosan kétszer haladunk végig.

6. Igazoljuk, hogy ha egy gráfban minden pont foka páros, akkor a gráf irányítható úgy, hogy a kapott irányított gráfban minden pont kifoka megegyezzen a befokával. [10.15]

7. Igazoljuk, hogy egy 4-reguláris egyszerű gráf éleit kiszínezhetjük pirossal és kékkel úgy, hogy minden csúcsra két piros és két kék illeszkedjen.

8. Egy összefüggő G gráfban $2k$ pontnak van páratlan foka ($k \geq 1$). Bizonyítsuk be, hogy G élhalmaza előáll k darab éldiszjunkt vonal uniójaként. Előállítható-e kevesebb vonal felhasználásával is? [10.12]

9.$^-$ Igazoljuk, hogy egy gráf akkor és csak akkor nem összefüggő, ha pontjait két nemüres osztályba tudjuk sorolni úgy, hogy különböző osztálybeli pontok között ne vezessen él.

10. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G egyszerű gráfra G vagy $\overline{G}$ összefüggő.

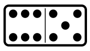
11. Bizonyítsuk be, hogy ha egy n pontú egyszerű gráfnak legalább $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$ éle van, akkor összefüggő. Igaz marad-e az állítás, ha a gráfnak csak $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ éle van?

12. Mutassuk meg, hogy egy összefüggő gráfban bármely két leghosszabb útnak van közös pontja.

13. Mutassuk meg, hogy ha egy gráfban pontosan két páratlan fokú csúcs van, akkor vezet köztük út.

14. Egy nagy ház minden olyan szobájában van TV-készülék, amelyiknek páratlan sok ajtaja van. Csak egy bejárata van a háznak. Mutassuk meg, hogy ezen a bejáraton bemenve mindig eljuthatunk egy olyan szobába, amelyikben van TV.

15. Egy dominó két összeragasztott négyzetből áll, mely négyzeteken a 0, 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 szám van (pöttyökkel jelezve). Minden konfiguráció előfordul, így összesen $7 + \binom{7}{2} = 28$ különböző dominó van. Le lehet-e rakni ezt a 28 dominót körszerűen úgy, hogy a szomszédos dominók érintkező fele mindig ugyanannyi pöttyöt tartalmazzon?



16.$^+$ Egy hegycsúcsról két út vezet le a tengerparthoz. Egyik út sem megy a tengerszint alá, illetve a hegycsúcsnál magasabbra. Mutassuk meg, hogy Anita és Béla a két úton haladva el tud úgy jutni a hegycsúcsról a tengerparthoz, hogy közben magasságuk végig megegyezik! (Az utakat „szép” görbék írják le, véges sok emelkedő/lejtő szakasszal.)

17.$^+$ Igazoljuk, hogy bármely n-re létezik olyan 2^n hosszú 0-1 sorozat, amelynek körszerű felírásában megtalálható (pontosan egyszer) az összes n hosszú 0-1 sorozat, az óramutató járásával megegyező körüljárásban elolvasva n egymást követő bitet.

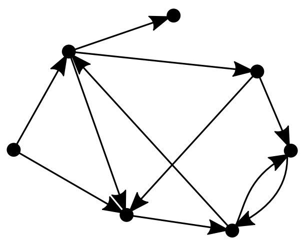
```
                    1 0
                  1     0
00010111  ⟶
                  1     0
                    0 1
```

Segítség: Olvassuk el az irányított gráfokról szóló részt.
Megjegyzés: Az ilyen sorozatok száma $2^{2^{n-1}}$, melyre elemi bizonyítás nem ismert.

Néhány definíció

- Ha egy gráfban minden pont foka ugyanaz, akkor azt mondjuk, hogy a gráf **reguláris**. Ha ez a közös fokszám d, és ezt hangsúlyozni szeretnénk, akkor ***d*-reguláris** gráfról beszélünk.

Néhány szó az irányított gráfokról (nem vizsgaanyag)



Az ábrán egy **irányított gráfot** látunk. Informálisan, az irányítatlan (=„hagyományos”) gráfokból élek irányításával nyert matematikai objektumokat irányított gráfoknak nevezzük, ahol élek irányításán azt értjük, hogy minden él valamelyik végére teszünk egy nyílvéget. (A precíz definíció, a később ismertetett fogalmakkal együtt, megtalálható a fogalomtárban.) Irányított gráfokkal nem szimmetrikus kapcsolatokat is tudunk modellezni, például a fenti gráf kódolhatja azt, hogy egy héttagú családban ki kit ajándékozott meg tavaly karácsonykor.

Egy irányított gráfban egy csúcsnak kétféle fokszáma van: Egy csúcs **kifoka** a csúcsból kiinduló élek (nyílvég nélküli élvégek) száma, a csúcs **befoka** pedig a csúcsba befutó élek (nyílvégek) száma. Könnyű meggondolni, hogy minden irányított gráfban a kifokok összege megegyezik a befokok összegével, és mindkét összeg az élek számát adja. (Vö. VII/9. feladat.)

Irányított gráfoknál a séta megfelelője az **irányított séta** (lásd fogalomtár), amely már figyelembe veszi az élek irányítását: egy élen mindig csak a nyíl irányába haladhatunk át (mintha „egyirányú utca” lenne). Az irányított vonal, út, Euler-vonal definíciója analóg módon történik.

Az **Euler-tétel** irányított gráfokra vonatkozó változata a következő: Egy $\overrightarrow{G}$ irányított gráfban akkor és csak akkor van *zárt* irányított Euler-vonal, ha $\overrightarrow{G}$ összefüggő és $\overrightarrow{G}$-ben minden pont kifoka megegyezik a befokával. (Itt az összefüggőség úgy értendő, hogy ha elhagyjuk az élek irányítását, akkor a kapott irányítatlan gráf legyen összefüggő.) Az irányítatlan Euler-tétel bizonyításának megértése után ezt a tételt nem olyan nehéz belátni.