

6. REKURZIÓK

1. Hányféleképpen lehet lefedni egy $2 \times n$ -es téglalapot dominókkal (1×2 -es téglalapokkal)?
2. Egy építőjátékunk van, amely piros és kék téglákat tartalmaz. Hányféleképpen lehet ilyen téglákból n magas tornyot építeni, ha nem engedjük meg, hogy két piros téglát szomszédos szintre kerüljön? (A téglák a színektől eltekintve egyformák. Minden szintre egy téglát kerül.)
3. n forintunk van. Minden nap pontosan egy dolgot veszünk a következők közül (zárójelben az egységár): percc (1 forint), fagylalt (2 forint), csoki (2 forint). Hányféleképpen költöztünk el a pénzünket?
4. Legyen s_n azoknak az n jegyű, csak 0, 1, 2 számjegyet tartalmazó számoknak a száma, amelyekben bármely két szomszédos számjegy legfeljebb 1-gyel tér el egymástól. Igazoljuk, hogy $n \geq 3$ -ra $s_n = 2s_{n-1} + s_{n-2}$. [6.20]
5. Oldjuk meg a következő lineáris rekurziókat.
 - a) $a_0 = 1, a_1 = 6; a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
 - b) $a_0 = 3, a_1 = 6; a_n = a_{n-1} + 6a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
 - c) $a_0 = 1, a_1 = 2; a_n = 6a_{n-1} - 7a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
 - d) $a_0 = 1, a_1 = 1; a_n = 4a_{n-1} - 2a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
 - e) $a_0 = 6, a_1 = 8; a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
 - f) $a_0 = 3, a_1 = -3; a_n = -6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
 - g) $a_0 = 1, a_1 = 1; a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).
 - h) $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 13; a_n = 3a_{n-1} - 4a_{n-3}$ (ha $n \geq 3$).
 - i) $a_0 = 17, a_1 = 14, a_2 = 110; a_n = 2a_{n-1} + 5a_{n-2} - 6a_{n-3}$ (ha $n \geq 3$).
- 6.⁺ Oldjuk meg a következő rekurziót:

$$a_0 = a_1 = 1; a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 3n + 2^n \quad (\text{ha } n \geq 2).$$

7. Egy kör alakú asztal körül $2n$ -en ülnek. Hányféleképpen alkothatnak az asztal körül ülők n párt úgy, hogy az egy párban lévők kezét foghassanak anélkül, hogy egy másik kezét fogó pár keze alatt vagy felett át kellene nyúlniuk? (Az asztal felett való átnyúlás megengedett.)

Lineáris rekurzió megoldása Wolfram Alphával:

Az 5/b. feladat megoldása: `solve a(0)=3, a(1)=6, a(n)=a(n-1)+6a(n-2)`

Kilenc kidolgozott lineáris rekurzió megoldás Hajnal Péter honlapján:

http://www.math.u-szeged.hu/~hajnal/courses/BSc_Kombinatorika/lin_alap.htm