

### 3. MULTIHALMAZOK, FORMÁLIS HATVÁNSOROK

1.- Egy kirándulásra gyümölcskosarat viszünk. Otthon öt alma, két körte, három banán és hat narancs van, ebből kell összeállítanunk a kosarat. Hányféle lehet a kirándulásra vitt gyümölcskosár, ha azt is számoljuk, amikor nem viszünk semmit sem? (Az azonos fajta gyümölcsök teljesen egyformák.)

2.- Egy pékségben nyolcfajta fánk kapható. A barátainknak szeretnénk egy doboz fánkot venni, amely 12 fánkot tartalmaz. Hányféleképpen állíthatjuk össze a doboz tartalmát a bolt kínálatából? (Az azonos fajta fánkokat nem különböztetjük meg. A bolt minden rendelést ki tud szolgálni.)

3.- Az alábbi egyenletnek hány megoldása van a nemnegatív egészek körében?

$$a + b + c + d = 2016.$$

4. Hányféleképpen oszthatunk el  $k$  db (egyforma) egyforintost  $n$  (különböző) gyerek között úgy, hogy

- tetszőleges elosztás megengedett;
- mindenki kapjon legalább egyet;
- az  $i$ -edik gyerek legalább  $i$  forintot kapjon ( $i = 1, \dots, n$ );
- mindenki páros sok forintot kapjon;
- mindenki páratlan sok forintot kapjon?

5. Cégünknel 20.000 ft bónuszt szeretnénk szétosztani hat dolgozó között. Három dolgozónak olyan szerződése van, hogy legalább 2.000 ft-ot kell kapniuk, a többieknek pedig legalább 1.000 ft-ot. Hányféleképpen oszthatjuk szét a rendelkezésre álló pénzüsszeget, ha mindenki 1.000-rel osztható összeget kap?

6. Van  $k$  fajta gyümölcsünk. Az  $i$ -edik fajtából  $a_i$  egyforma darab van. A gyümölcsöket két egyforma tálcán szeretnénk két csoportba osztani (üres csoport is megengedett). Hányféle módon tehetjük ezt meg?

7. Hány monoton növekvő  $[n] \rightarrow [n]$  függvény van? (Egy  $f$  függvény monoton növekvő, ha  $x < y$  esetén  $f(x) \leq f(y)$ .)

8. Mutassuk meg, hogy a  $\{0, 1, \dots, 2n + 1\}$  alaphalmaz felett  $4^n$  darab olyan  $n$  elemű multihalmaz adható meg, amelyben az  $1, 2, \dots, 2n + 1$  elemek multiplicitása legfeljebb 1 (és a 0 elem multiplicitása tetszőleges).

9. Az  $(n$  elemű alaphalmaz feletti)  $M$  multihalmaz multiplicitásvektora  $(m_1, \dots, m_n)$ . Jelölje  $r_k$  az  $M$  multihalmaz  $k$  elemű részmultihalmazainak számát. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k = \prod_{k=1}^n (1 + x + x^2 + \dots + x^{m_k}).$$

10. Hány olyan  $k$  elemű multihalmaz van  $[2n]$  felett, amelyben  $1, 2, \dots, n$  multiplicitása legfeljebb 1, és  $n + 1, n + 2, \dots, 2n$  multiplicitásai párosak? [TK. 3.4.7.]

11.+ Bizonyítsuk be, hogy  $\sum c_1 \dots c_k = \binom{n+k-1}{2k-1}$ , ahol az összegezés az összes olyan nemnegatív egészekből álló  $\{c_i\}_{i=1}^k$  sorozaton fut végig, amelyre  $c_1 + \dots + c_k = n$ . [TK. 3.4.11.]

12. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat: [TK. 3.4.13.]

a) 
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n}{k-1},$$

$$\text{b) } \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k},$$

$$\text{c) } \binom{n}{k} = \sum_{i=0}^k \binom{n-1}{i}.$$

**13.** Legyen  $F$  a prímszámok generátorfüggvénye,  $G$  pedig a  $\sum_{k=0}^{\infty} (-2)^k x^k$  formális hatvány-sor, vagyis

$$F = 2 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \dots$$

$$G = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \dots$$

- a) Számoljuk ki az  $FG$  szorzat első négy tagját.
- b) Számoljuk ki az  $\frac{F}{G}$  hányados első négy tagját.