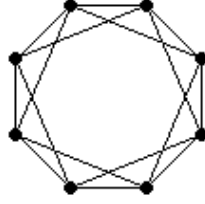


2. ZÁRTHELYI DOLGOZAT

1. Határozzuk meg az ábrán látható gráf kromatikus számát:



2. Egy T fában a maximális fokszám Δ . Igazoljuk, hogy T -nek legalább Δ levele van.

3. Egy hurokélmentes G gráf minden csúcsának fokszáma négy. Mutassuk meg, hogy G éleit pirosra és kékre lehet színezni úgy, hogy minden csúcsra két piros és két kék illeszkedjen.

4. Határozzuk meg azokat az egyszerű páros gráfokat, melyek izomorfak a komplementerükkel.

5. Oldjuk meg a következő rekurziót: $a_0 = 1$, $a_1 = 3$ és $a_n = 10a_{n-1} - 25a_{n-2}$ (ha $n \geq 2$).

6.⁺ Jelölje C_n az n -edik Catalan-számot, azaz $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$. Bizonyítsuk be az alábbi azonosságot:

$$\sum_{k=0}^n C_{2k} C_{2(n-k)} = 4^n C_n.$$

Segítség: Kombinatorikus bizonyítás nem ismert. A Catalan-számok generátorfüggvénye:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$$

Minden feladat teljes megoldása 5 pontot ér.

Jó munkát!