1. ZÁRTHELYI DOLGOZAT

1. Hányféleképpen lehet a MATEMATIKA szó betűit leírni úgy, hogy a kialakult szóban az első M betű a 6. helyen álljon? (Például egy ilyen szó az AKIETMAAMT.)

2. Igazoljuk, hogy egy nemüres halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van, mint páratlan elemszámú.

3. Bizonyítsuk be a következő azonosságot:

$$1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$$

4. Mutassuk meg, hogy a $\{0, 1, \ldots, 2n+1\}$ alaphalmaz felett 4^n darab olyan n elemű multihalmaz adható meg, amelyben az $1, 2, \ldots, 2n+1$ elemek multiplicitása legfeljebb 1 (és a 0 elem multiplicitása tetszőleges).

5. Legyen σ egy tetszőleges (rögzített) permutációja az $\{1, \ldots, n\}$ számoknak. Hány olyan π permutációja van ezeknek a számoknak, amely mindenütt különbözik σ-tól (azaz $\pi(i) \neq \sigma(i)$ minden i-re)?
Segítség: Gyakorlaton megoldottuk ennek a feladatnak azt a speciális esetét, amikor σ az identitás.

6.$^+$ Jelölje F_n az n-edik Fibonacci-számot ($F_0 = F_1 = 1$, $F_2 = 2, \ldots$ indexeléssel). Igazoljuk a következő azonosságot:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F_k = F_{2n}$$

Minden feladat teljes megoldása 5 pontot ér. *Jó munkát!*