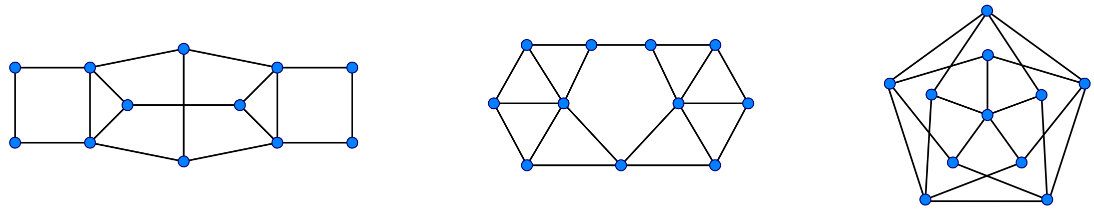
10. KROMATIKUS SZÁM

1.$^-$ Határozzuk meg az ábrán látható gráfok kromatikus számát: [13.5]



2. Vegyünk egy 4 hosszú kört és egy 5 hosszú kört (melyek csúcsdiszjunktak). A 4 hosszú kör minden pontját kössük össze az 5 hosszú kör összes pontjával. Mennyi az így kapott (9 pontú) gráf kromatikus száma?

3. Definiáljuk a következő egyszerű gráfot: A gráf csúcsai egy sakktábla mezői, és két csúcs (mező) pontosan akkor összekötött, ha egy király egyikről a másikra léphet szabályos lépéssel. Mennyi a kapott gráf kromatikus száma? [13.6]

4. A G gráf csúcshalmaza $\{1,\dots,100\}$, és két különböző csúcs (szám) pontosan akkor összekötött, ha relatív prímek. Igazoljuk, hogy $\chi(G)=\pi(100)+1$, ahol $\pi(100)$ jelöli azt, hogy hány prímszám van 1-től 100-ig.

5. Az $\{1,\dots,100\}$ csúcshalmazon egy egyszerű gráfot definiálunk: Legyen két különböző csúcs (szám) pontosan akkor összekötött, ha egyik osztja a másikat. Határozzuk meg a kapott gráf kromatikus számát. [13.8]

6. A $KG(n,k)$ Kneser-gráf csúcshalmaza $\binom{[n]}{k}$, és két csúcs (részhalmaz) pontosan akkor összekötött, ha diszjunktak. Mutassuk meg, hogy $n\ge 2k$ esetén $\chi(KG(n,k))\le n-2k+2$.
Megjegyzés: Lovász László topológiai érveléssel igazolta, hogy valójában egyenlőség teljesül.

7. Adott a síkon néhány egyenes úgy, hogy semelyik három nem halad át közös ponton. A keletkező metszéspontok alkotják a G gráf csúcshalmazát, és két csúcs pontosan akkor összekötött G-ben, ha szomszédos metszéspontok valamelyik egyenesen. Igazoljuk, hogy G kromatikus száma legfeljebb 3. [13.22]

8. Mutassuk meg, hogy tetszőleges G egyszerű gráfra teljesülnek a következők:

a) $\chi(G)\ge\frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$,

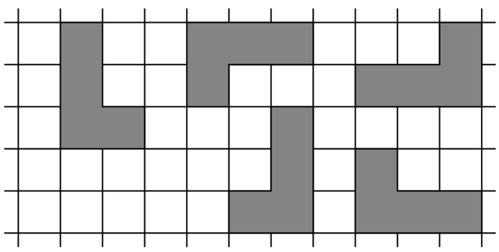
b) $\chi(G)\chi(\overline{G})\ge|V(G)|$,

c) $|E(G)|\ge\binom{\chi(G)}{2}$.

9. Egy G gráf élhalmaza felbontható három olyan diszjunkt részre, melyek mindegyike páros gráfot alkot. Mutassuk meg, hogy $\chi(G)\le 8$.

10.$^+$ A sík pontjait kiszínezzük három színnel. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges színezés esetén lesz két pont, amelyek távolsága egységnyi, és azonos színűek. [13.2]

11.$^+$ Mi az a minimális színszám, ahány színnel ki lehet színezni a (végtelen) négyzetrács mezőit úgy, hogy bárhogy rakunk le „L-alakot” (lásd ábra), az négy különböző színű mezőt takarjon le?



12.$^{+}$ Egy országban kör alakú autópályákat építettek úgy, hogy semelyik két kör nem érinti egymást. Bizonyítsuk be, hogy az autópályák kereszteződéseiben létesíthetők kétszintű csomópontok úgy, hogy tetszőleges autópályán körbehaladva a felső illetve alsó szintek váltakozzanak! (Egy kereszteződésben pontosan két autópálya találkozik.) [13.25]