8. ÖSSZEFÜGGŐSÉG, FÁK

1.$^-$ Körszerűen elhelyezünk 26 csúcsot, és a negyedszomszédosakat összekötjük. Hány komponense lesz a kapott gráfnak?

2.$^-$ Bizonyítsuk be, hogy ha egy $2n$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább n, akkor a gráf összefüggő. [11.12]

3. Jellemezzük azokat a gráfokat, amelyben minden csúcs foka legfeljebb 2.

4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges G egyszerű gráfra G vagy $\overline{G}$ összefüggő. [11.8]

5. Igazoljuk, hogy ha egy (legalább 2 pontú) teljes gráf éleit pirosra és kékre színezzük, akkor kialakul olyan feszítőfa, melynek minden éle ugyanolyan színű.

6. Létezik-e olyan összefüggő gráf, amelynek fokszámsorozata $1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4$?

7.$^-$ a) Igazoljuk, hogy minden legalább két pontú fának van levele (legalább kettő).
b) Igazoljuk, hogy egy T fának legalább $\Delta(T)$ levele van, ahol $\Delta(T)$ a maximális fokszámot jelöli T-ben.

8. Igazoljuk, hogy bármely legalább kétpontú összefüggő gráfban van olyan csúcs, amelyet elhagyva a maradék gráf is összefüggő. [11.33]

9. Egy 210 pontú fában minden csúcs foka 1 vagy 3. Hány levele van a fának?

10. Egy G gráfban nincs kör, G komponenseinek száma c. Bizonyítsuk be, hogy G éleinek száma $n - c$. [11.28]

11. Bizonyítsuk be, hogy egy $2n$ élű fa élhalmaza felbontható n darab diszjunkt párra, ahol egy párban szomszédos élek szerepelnek. [11.24]

12. Jelöljünk ki egy fában 4 levelet. Mutassuk meg, hogy ezek összepárosíthatók úgy, hogy a párok éldiszjunkt utakkal legyenek összekötve.

13. a) Mutassuk meg, hogy egy összefüggő gráfban bármely két leghosszabb útnak van közös pontja.
b) Mutassuk meg, hogy egy fában a leghosszabb utak lefoghatók egyetlen ponttal. (Azaz van olyan pont a fában, amelyen az összes maximális hosszúságú út áthalad.)
Megjegyzés: Megadható olyan összefüggő (nem fa) gráf, amelyben nincs ilyen pont. (De nem könnyű ilyen gráfot találni.)

14.$^+$ Legyenek $T_1, \ldots, T_k$ egy T fa összefüggő részgráfjai. Bizonyítsuk be, hogy ha bármelyik két T_i és T_j fának van közös pontja, akkor van olyan pont, amely az összes T_i-n rajta van.

15.$^+$ Egy középkori országban 1000 város van, és bizonyos városok közvetlen földúttal vannak összekötve (csak városokban van útkereszteződés). Ezen az úthálózaton bármelyik városból bármelyik másikba el lehet jutni. Az uralkodó szeretne bizonyos földutakat leköveztetni úgy, hogy minden városból páratlan sok kövesút induljon ki. Mutassuk meg, hogy ez megtehető.

16.$^+$ Egy társaságban néhányan korábbról már ismerik egymást, de nem mindenki ismer mindenkit. Minden este a társaság egyik tagja meghívja az összes (aktuális) ismerősét a társaságból egy partira, ahol bemutatja őket egymásnak. Tegyük fel, hogy már mindenki tartott legalább egy ilyen partit, de Anna és Béla még nem ismerősök. Igazoljuk, hogy ők a következő partin sem lesznek bemutatva egymásnak.

17.$^+$ Egy $n \times n$-es táblázat minden mezőjében egy-egy betű van. A táblázat bármely két sora különböző. Bizonyítsuk be, hogy a táblázatnak van olyan oszlopa, amelyet elhagyva a megmaradó táblázatnak sincs két egyező sora.