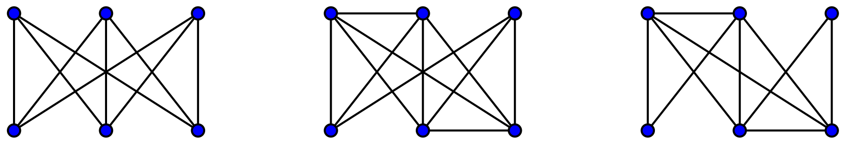
7. VONALAK, KÖRÖK, UTAK

1. Legyen G egy olyan gráf, amelyben minden csúcs fokszáma páros. Bizonyítsuk be, hogy G élhalmaza körök élhalmazainak diszjunkt uniója. [TK. 4.1.12.]

2.$^-$ Az alábbi gráfok közül melyekben van Euler-vonal, illetve zárt Euler-vonal (Euler-körvonal)?



3.$^-$ A G gráf csúcshalmaza $\{1, \ldots, 100\}$, továbbá az i és j csúcsok pontosan akkor összekötöttek, ha $|i - j| \leq 2$. Van-e Euler-vonal, illetve zárt Euler-vonal G-ben?

4. A G_n egyszerű gráf csúcsai az n hosszú 0-1 (bit)sorozatok ($n \geq 3$). Van-e Euler-vonal G_n-ben, ha két csúcs pontosan akkor összekötött, ha a megfelelő bitsorozatok

a) pontosan 1 bitben térnek el;
b) pontosan 2 bitben térnek el?

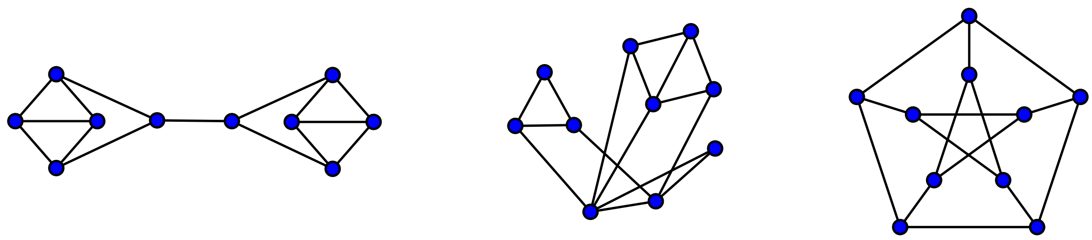
5. Bizonyítsuk be, hogy minden összefüggő gráf bejárható körsétával úgy, hogy minden élen pontosan kétszer haladunk végig.

6. Igazoljuk, hogy ha egy gráfban minden pont foka páros, akkor a gráf irányítható úgy, hogy a kapott irányított gráfban minden pont kifoka megegyezzen a befokával. [10.15]

7. Igazoljuk, hogy egy 4-reguláris egyszerű gráf éleit kiszínezhetjük pirossal és kékkel úgy, hogy minden csúcsra két piros és két kék illeszkedjen.

8. Egy összefüggő G gráfban $2k$ ($k \geq 1$) pontnak van páratlan foka. Bizonyítsuk be, hogy G élhalmaza előáll k darab (él)diszjunkt vonal uniójaként. Előállítható-e kevesebb vonal felhasználásával is? [10.12]

9. Döntsük el, hogy a 3–4. feladat gráfjaiban, illetve az alábbi gráfokban van-e Hamilton-út, Hamilton-kör:



10. Bejárható-e a 4×4-es sakktábla lóugrásokkal úgy, hogy minden mezőre egyszer lépünk?

11. Egy 3×3×3 méretű sajtkocka 27 kis kockából áll. Egy egér a kis kockákat egyesével tervezi elfogyasztani úgy, hogy egy kis kocka után mindig olyan kocka következzen, amelyiknek az épp elfogyasztottal van közös lapja. Az egér az egyik sarokból kezdi a lakomát. El tudja-e fogyasztani a teljes sajtot út, hogy utoljára olyan kockát fogyasszon, aminek van közös lapja az elsővel?

12. A $KG(16, 3)$ Kneser-gráf csúcshalmaza $\binom{[16]}{3}$, és két csúcs (részhalmaz) pontosan akkor összekötött, ha diszjunktak. Mutassuk meg, hogy $KG(16, 3)$-ban van Hamilton-kör.

13. Igazoljuk, hogy ha egy $2n+1$ pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább n, akkor a gráf tartalmaz Hamilton-utat! (Vezessük vissza a Dirac-tételre a feladatot.)

14. (Rédei tétele.) Igazoljuk, hogy K_n bármely irányításában van irányított Hamilton-út! Igaz-e, hogy mindig van Hamilton-kör is?

15.$^+$ Igazoljuk, hogy bármely n-re létezik olyan 2^n hosszú 0-1 sorozat, amelynek körszerű felírásában megtalálható (pontosan egyszer) az összes n hosszú 0-1 sorozat (az óramutató járásával megegyező körüljárásban elolvasva n egymást követő bitet).

$$00010111 \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{cccc} & 1 & 0 & \\ 1 & & & 0 \\ 1 & & & 0 \\ & 0 & 1 & \end{array}$$

Segítség: Az irányítatlan esethez hasonlóan igazolható, hogy egy irányított gráfban pontosan akkor létezik irányított Euler-körvonal, ha bármely pontból el lehet jutni bármelyik másikba irányított úton, és minden pont befoka megegyezik a kifokával. (Ezt nem kell bizonyítani.)
Megjegyzés: Az ilyen sorozatok száma $2^{2^{n-1}}$, melyre elemi bizonyítás nem ismert.

16.$^+$ Egy hegycsúcsról két út vezet le a tengerparthoz. Egyik út sem megy a tengerszint alá, illetve a hegycsúcsnál magasabbra. Mutassuk meg, hogy Anita és Béla a két úton haladva el tud úgy jutni a hegycsúcsról a tengerparthoz, hogy közben magasságuk végig megegyezik! (Az utakat „szép” görbék írják le, véges sok emelkedő/lejtő szakasszal.)