6. GRÁFELMÉLETI ALAPOK

1.$^-$ a) A $V(G) = \{1, \ldots, n\}$ csúcshalmazon hány egyszerű gráf adható meg? [9.4]
b) Ezek között hány m élű gráf van?
Ebben a feladatban két gráfot akkor tekintünk azonosnak, ha az élhalmazuk megegyezik.

2.$^-$ Lehet-e egy gráf fokszámsorozata $3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 5$?

3.$^-$ Bizonyítsuk be, hogy minden társaságban azoknak a száma, akik páratlan sok embert ismernek, páros szám. (Az ismeretségek kölcsönösek.) [9.21]

4. Bizonyítsuk be, hogy minden legalább két főből álló társaságban található két olyan ember, akinek ugyanannyi ismerőse van. [9.23]

5. Egy 10 férfiból és 10 nőből álló baráti társaságban minden férfi 5 emberrel fogott kezet az este folyamán. Hány férfi–nő kézfogás történt, ha tudjuk, hogy az összes férfi–férfi kézfogások száma 12? (Férfi–nő kézfogás: Egy férfi és egy nő fog kezet. Férfi–férfi kézfogás: Két férfi fog kezet.)

6. Egy G egyszerű gráfban a minimális (= legkisebb) fokszám δ. Igazoljuk, hogy G-ben van δ hosszú út. Igazoljuk továbbá, hogy ha $\delta \geq 2$, akkor létezik G-ben δ-nál hosszabb kör.

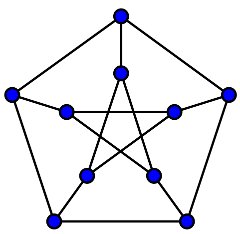
7. Egy 9 tagú társaságban mindenki pontosan öt másik embernek átad 100 Ft-ot. Bizonyítsuk be, hogy az ajándékozások után van két olyan ember, akinek ugyanannyi forinttal változott a pénze. [9.24]

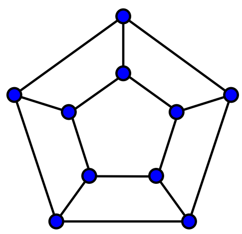
8. Egy pingpongbajnokságon a tíz résztvevő közül mindenki egyszer játszott mindenkivel. Az i-edik versenyző győzelmeinek száma w_i, vereségeinek száma l_i ($i = 1, \ldots, 10$). Igazoljuk, hogy

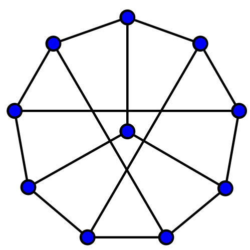
$$w_1^2 + \cdots + w_{10}^2 = l_1^2 + \cdots + l_{10}^2. \qquad [9.28]$$

9. Tekintsük az előző feladatban szereplő bajnokságot. Azt mondjuk, hogy A játékos közvetett módon legyőzte a B játékost, ha van olyan A által megvert C játékos, aki B-t megverte. Igazoljuk, hogy van olyan játékos, aki minden más játékost legyőzött (közvetlenül vagy közvetett módon).

10. Legyen G az az egyszerű gráf, amelynek csúcshalmaza $\binom{[5]}{2}$, és két csúcs (kételemű halmaz) pontosan akkor összekötött, ha diszjunktak. Ez a gráf az alábbiak közül melyekkel izomorf?







11.$^+$ Az erdőben 12 törpe él piros vagy kék házikóban. Az év i-edik hónapjában az i-edik törpe felkeresi összes barátját, hogy eldöntse, átfesse-e a saját házát. Akkor és csak akkor fogja átfesteni (pirosról kékre vagy fordítva), ha a barátai (szigorú) többsége más színű házban lakik, mint ő. Ez évről évre így történik. Bizonyítsuk be, hogy egy idő után már senki nem festi át a házikóját! (A barátságok kölcsönösek és nem változnak az idő múlásával. Természetesen nem feltétlenül barátja mindenki mindenkinek.)