5. LOGIKAI SZITA

1. Hány olyan sorbaállítása van az angol ábécé 26 betűjének, mely egymás utáni három betűként a LOM, HOZ és ZAB szavak egyikét sem tartalmazza?

2. Hány olyan n-nél nem nagyobb pozitív egész szám van, amelynek minden prímosztója legalább kétjegyű? [7.7]

3. Legyen $\phi(n)$ az n-nél nem nagyobb, n-hez relatív prím pozitív egészek száma. Keressünk $\phi(n)$-re képletet. [7.5]

4. a) Hányféleképpen táncolhat n házaspár úgy, hogy senki sem táncol a saját házastársával?
b) Hányféleképpen táncolhat n házaspár úgy, hogy pontosan k férfi táncol a feleségével?

5. Hány olyan tízjegyű telefonszám van, amelyben mindegyik páratlan számjegy előfordul legalább egyszer? (A telefonszámokra nincs semmilyen megkötés, például a 0000000000 is egy telefonszám.)

6. Jelölje $\left\{ n \atop k \right\}$ azt a számot, hogy egy n elemű halmazt hányféleképpen lehet k darab (nemüres) halmazra partícionálni. (Például $\left\{ 3 \atop 2 \right\} = 3$, mert az $\{1, 2, 3\}$ halmaznak 3 db 2 osztályból álló partícionálása van: $\{\{1, 2\}, \{3\}\}$, $\{\{1, 3\}, \{2\}\}$ és $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$.) Bizonyítsuk be, hogy

$$\left\{ n \atop k \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

Megjegyzés: Az $\left\{ n \atop k \right\}$ számokat *másodfajú Stirling-számoknak* nevezzük.

7. Egy pékség négyféle zsemlét árul: mákosat, szezámmagosat, bajort és normált. Az egyes fajtákból rendre 3, 4, 5 és 6 darab van a boltban. 12 zsemlét szeretnénk venni. Hányféleképpen állíthatjuk össze a rendelést?

8. Egy gálavacsorán n házaspár vesz részt. Mind a $2n$ jelenlévő egy pohárköszöntőt mond az este folyamán. Hányféle sorrendben lehet megtartani a pohárköszöntőket úgy, hogy semelyik házaspár két tagja ne következzen (közvetlenül) egymás után?

9. Hányféleképpen lehet egy n elemű halmazt k darab különböző, m elemű részhalmazával lefedni? [7.8]

10.$^+$ Hány olyan $\pi : [n] \to [n]$ permutáció van, amelyre $\pi(i + 1) - \pi(i) \neq 1$ teljesül minden i-re $(1 \leq i \leq n - 1)$?

11. Bizonyítsuk be, hogy $m, n \geq 1$ esetén [7.15]

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{m}{k} \binom{m-k}{n-k} = 0.$$