4. SORBAÁLLÍTÁSOK, PERMUTÁCIÓK

1.$^-$ Hányféleképpen állíthatjuk sorba $\{1, 2, \ldots, 6\}$ elemeit úgy, hogy ne a 2-es számmal kezdjük a sort? [4.3]

2.$^-$ Hányféleképpen lehet n bástyát elhelyezni az $n \times n$-es sakktáblán úgy, hogy semelyik kettő ne üsse egymást?

3.$^-$ Hányféleképpen ülhet le egy kör alakú asztalhoz hét ember? (Két ülésmódot nem tekintünk különbözőnek, ha mindenkinek ugyanaz a két szomszédja.) [4.29]

4.$^-$ Barbara, Bea, Bori, Balázs és 4 barátjuk (Attila, András, Ali és Anna) moziba ment. Mind a 8 jegy egy sorba, egymás mellé szólt. A 8 ember hány különböző ülésrendben foglalhat helyet, ha az azonos betűvel kezdődő keresztnevűek közül semelyik kettő nem kerül egymás mellé?

5. Hányféleképpen állhat be n vásárló egy bolt k pénztárához fizetni? [TK. 3.4.8.]

6. Hányféleképpen lehet leírni a MISSISSIPPI szó betűit úgy, hogy a négy S betű ne kerüljön egymás mellé? [4.13]

7. Hányféleképpen lehet leírni a MATEMATIKA szó betűit úgy, hogy az E és I betűk ne kerüljenek egymás mellé?

8. n különböző pár zoknit rakunk be egy mosógépbe. A mosás után a zoknikat egyesével húzzuk ki a mosógépből. Hányféle kihúzási sorrend esetén lesz az i-edik kihúzott zokni az, amelyik az első párt fejezi be? [4.22]

9. Hány nullára végződik a $((3!)!)!$ szám? [4.6]

10. Bizonyítsuk be az $(n!)^{n+1} | (n^2)!$ oszthatóságot. [4.8]

11. Legyen $p_n(k)$ egy n elemű halmaz pontosan k fixponttal rendelkező permutációinak száma. Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{k=0}^{n} k p_n(k) = n!$. [4.11]

12.$^+$ Bizonyítsuk be Wilson tételét, mely szerint tetszőleges p prímszámra $p | (p-1)! + 1$.
Segítség: Számoljuk meg, hogy egy szabályos p-szög csúcsai között hány körút tervezhető úgy, hogy minden csúcson pontosan egyszer megyünk keresztül, ha az elforgatással egymásba vihető körutakat nem különböztetjük meg. [4.31]

13.$^-$ Határozzuk meg az alábbi $\pi : [8] \to [8]$ permutáció ciklusainak és inverzióinak számát: $\pi(1) = 3$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = 6$, $\pi(4) = 4$, $\pi(5) = 8$, $\pi(6) = 2$, $\pi(7) = 5$, $\pi(8) = 7$.

14. Határozzuk meg az $i(n, 0)$, $i(n, 1)$, $i(n, 2)$, $i(n, \binom{n}{2} - 1)$ és $i(n, \binom{n}{2})$ értékeket! [TK. 4.7.4.]

15.$^-$ Igazoljuk, hogy tetszőleges π permutáció esetén $\mathrm{inv}(\pi) = \mathrm{inv}(\pi^{-1})$.

16. Egy permutációt *párosnak* nevezünk, ha az inverziószáma páros, illetve *páratlannak*, ha az inverziószáma páratlan. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 2$, akkor az $[n]$ halmaznak ugyanannyi páros permutációja van, mint páratlan!

17.$^+$ Nem nehéz látni, hogy az $1, \ldots, n$ elemek tetszőleges π sorbaállításából megkapható az $123 \ldots n$ sorbaállítás transzpozíciók végrehajtásával, ahol egy transzpozíció alatt két elem megcserélését értjük a sorbaállításban. Bizonyítsuk be, hogy ha π páros, akkor mindig páros sok transzpozíció (csere) szükséges, míg ha π páratlan, akkor páratlan sok.
Segítség: Mutassuk meg, hogy egy transzpozíció megváltoztatja a permutáció paritását. (Ezt két szomszédos elem megcserélésére a legkönnyebb végiggondolni. Nem szomszédos elemek cseréje pedig előállítható szomszédos elemek seréinek egymásutánjaként.)

18. Bizonyítsuk be a következő egyenlőségeket: [TK. 4.5.3.]

a) $\left[{n \atop 1}\right] = (n-1)!$,

b) $\left[{n \atop 2}\right] = (n-1)!(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1})$,

c) $\left[{n \atop n}\right] = 1$,

d) $\left[{n \atop n-1}\right] = \binom{n}{2}$,

e) $\left[{n \atop n-2}\right] = 2\binom{n}{3} + 3\binom{n}{4}$.

19. Véletlenül választunk egy permutációt S_n-ből. Mi annak a valószínűsége, hogy az 1 elemet tartalmazó ciklus hossza k?

20. Véletlenül választunk egy permutációt S_n-ből. Mi annak a valószínűsége, hogy az 1 és 2 elemek ugyanabban a ciklusban lesznek?

21. Hány olyan permutációja van $[n]$-nek, amelyben minden ciklus hossza 2?

22. Hány olyan permutációja van $[n]$-nek, amelyben minden ciklus hossza páros?

23.$^+$ Mennyi a ciklusok száma S_n permutációiban összesen?

24. Igazoljuk, hogy ha $n \geq 2$, akkor S_n-ben ugyanannyi páros sok ciklust tartalmazó permutáció van, mint páratlan sok ciklust tartalmazó!

25.$^+$ Egy városban csak két család közötti lakáscserét lehet elvégezni (több családot érintő lakáscsere tilos), és egy család egy nap csak egyszer költözhet. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges lakáscsere elvégezhető két nap alatt. [4.44]