3. MULTIHALMAZOK

1.$^-$ Az alábbi egyenletnek hány megoldása van a nemnegatív egészek körében?

$$a + b + c + d = 2015.$$

2.$^-$ Hányféleképpen oszthatunk el k db egyforintost n gyerek között úgy, hogy
a) tetszőleges elosztás megengedett;
b) mindenki kapjon legalább egyet;
c) az i-edik gyerek legalább i forintot kapjon ($i = 1, \ldots, n$);
d) mindenki páros sok forintot kapjon;
e) mindenki páratlan sok forintot kapjon?

3. Van k fajta gyümölcsünk. Az i-edik fajtából a_i egyforma darab van. A gyümölcsöket két egyforma tálcán szeretnénk két csoportba osztani (az egyik csoport lehet üres is). Hányféle módon tehetjük ezt meg?

4. Hány monoton növő $[n] \to [n]$ függvény van?

5. Mutassuk meg, hogy a $\{0, 1, \ldots, 2n+1\}$ alaphalmaz felett 4^n darab olyan n elemű multihalmaz adható meg, amelyben az $1, 2, \ldots, 2n+1$ elemek multiplicitása legfeljebb 1 (és a 0 elem multiplicitása tetszőleges).

6. Az (n elemű alaphalmaz feletti) M multihalmaz multiplicitásvektora $(m_1, \ldots, m_n)$. Jelölje r_k az M multihalmaz k elemű részmultihalmazainak számát. Igazoljuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} r_k x^k = \prod_{k=1}^{n} (1 + x + x^2 + \cdots + x^{m_k}).$$

7. Hány olyan k elemű multihalmaz van $[2n]$ felett, amelyben $1, 2, \ldots, n$ multiplicitása legfeljebb 1, és $n+1, n+2, \ldots, 2n$ multiplicitásai párosak? [TK. 3.4.7.]

8.$^+$ Bizonyítsuk be, hogy $\sum c_1 \ldots c_k = \binom{n+k-1}{2k-1}$, ahol az összegezés az összes olyan nemnegatív egészekből álló $\{c_i\}_{i=1}^k$ sorozaton fut végig, amelyre $c_1 + \cdots + c_k = n$. [TK. 3.4.11.]

9. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat: [TK. 3.4.13.]

a) $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right)$,

b) $\left(\!\!\binom{2n}{n}\!\!\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) \left(\!\!\binom{n}{n-k}\!\!\right)$,

c) $\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \sum_{i=0}^{k} \left(\!\!\binom{n-1}{i}\!\!\right)$.