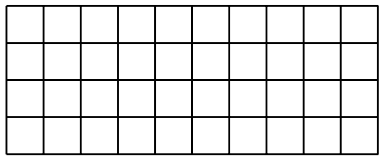
2. BINOMIÁLIS EGYÜTTHATÓK, POLINOMOK

1. Az alábbi egyenletnek hány megoldása van a pozitív egészek körében?

$$a+b+c+d=2015.$$

2.$^-$ Hány téglalapot határoznak meg az alábbi rács vonalai? [3.4]



3.$^-$ A 32 lapos magyar kártyából egyszerre kihúzunk 6 lapot. Hányféleképpen tehetjük ezt meg úgy, hogy a kihúzott lapok között pontosan két piros lap és pontosan két ász legyen? (A kihúzott lapok sorrendje nem számít.)

4. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai egy adott szabályos 23-szög csúcsai közül valók, és amely tartalmazza a sokszög középpontját? [3.3]

5.$^+$ Mi a valószínűsége annak, hogy egy lottóhúzás öt száma között van legalább két szomszédos (azaz két olyan szám, amelynek különbsége 1)? [3.6]

6.$^+$ Az 1987. évi 34. heti lottóhúzáskor két pár egymás utáni számot is kihúztak: a $(31,32)$-t és az $(50,51)$-et. Mi annak a valószínűsége, hogy a jövő heti húzás eredménye hasonlóan alakul, azaz kihúznak két szomszédos számból álló párt, de nem húznak ki három egymás utáni számot? [3.7]

7. Bizonyítsuk be, hogy bármely $n\ge 2$ természetes számra

$$\frac{2^n}{n}\le\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}\le\frac{2^n}{\sqrt{n}}.$$

8. Bizonyítsuk be, hogy $n\ge k\ge 1$ esetén

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k\le\binom{n}{k}\le\left(\frac{ne}{k}\right)^k.$$

9. $\binom{90}{5}$ páros vagy páratlan? (A kérdést próbáljuk a $\binom{90}{5}$ binomiális együttható pontos értékének kiszámítása nélkül megválaszolni.)

10. Igazoljuk a következő kongruenciákat (mod 2):

$$\binom{2n}{2k+1}\equiv 0,\quad \binom{2n}{2k}\equiv\binom{n}{k},\quad \binom{2n+1}{2k}\equiv\binom{n}{k},\quad \binom{2n+1}{2k+1}\equiv\binom{n}{k}.$$

11. Bizonyítsuk be a következő azonosságokat: [3.17]

a) $\displaystyle\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}.$

b) $\displaystyle\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$

c) $\displaystyle\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0,\quad \text{ha } n\ge 1.$

d) $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

e) $\binom{n}{k}\binom{k}{l} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$.

f) $0\binom{n}{0} + 1\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}$.

g) $\binom{n}{k} + \binom{n-1}{k} + \cdots + \binom{k}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

h) $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

12.$^+$ Bizonyítsuk be, hogy ha n természetes szám, akkor

$$(5+\sqrt{26})^n$$

tizedestört-alakjában a tizedesvesszőt követő első n jegy egyenlő. [3.21]

13. Írjuk fel egyszerűbb alakban az $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32})$ polinomot!

14. a) Határozzuk meg az $(1+x^5+x^{10})(1+x^{10})(1+x^{20}+x^{40}+x^{60}+x^{80})$ polinomszorzás eredményét.
b) Pénztárcánkban két 5-forintos, egy 10-forintos, és négy 20-forintos van. Milyen összegeket tudunk kifizetni úgy, hogy a pénztárosnak ne kelljen visszaadni? Az egyes kifizetéseknél hány lehetőségünk van?
c) Mi köze van a két feladatnak egymáshoz?

15.$^+$ Lehetséges-e két dobókockát úgy „cinkelni” (tehát az egyes számok dobásának valószínűségét úgy megváltoztatni), hogy a feldobások után a kapott számokat összeadva 2-től 12-ig minden lehetséges összeg bekövetkezésének valószínűsége azonos legyen? [3.39]

16.$^+$ Azt szeretnénk megtippelni, hogy a kihúzott lottószámok összege páros vagy páratlan lesz-e. Melyik lehetőségnek nagyobb a valószínűsége

a) ötöslottó esetén (90 számból 5-öt húznak ki),
b) hatoslottó esetén (45 számból 6-ot húznak ki),
c) skandináv lottó esetén (35 számból 7-et húznak ki)?