

## 1. KOMBINATORIKUS ALAPELVEK, RÉSZHALMAZOK

- 1.− Hány legalább 6, de legfeljebb 9 karakterből álló jelszó készíthető a 26 betűs angol ábécé betűit felhasználva?
- 2.− Hány olyan hétjegyű telefonszám van, amely 4-essel kezdődik, pontosan 3 db 2-es van benne, és nincs benne 0?
3. Hány olyan egész szám van 0-tól 999.999-ig, amely tartalmaz 3-as számjegyet?
4. Egy dobókockát feldobunk négyszer egymás után. Hány olyan dobássorozat van, amelyben van többször előforduló dobott érték?
5. Az  $\{1, 2, \dots, 10\}$  halmaz hány részhalmaza tartalmaz legalább egy páratlan számot? [3.1]
6.  $n$  különböző csokit két (nemüres) csoportra osztunk. Hányféle módon tehetjük ezt meg?
7. Legyen  $U$  egy  $n$  elemű (alap)halmaz. Határozzuk meg azoknak az  $(X, Y)$  pároknak a számát, amelyekre  $X \subseteq Y \subseteq U$ . [TK. 3.1.3.]
8. Egy  $n$  elemű halmaz összes részhalmaza közül taláломra kiválasztunk egyet, majd az összes részhalmaz közül megint kiválasztunk egyet (uniform módon, egymástól függetlenül). Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy a két kiválasztott részhalmaz közül egyik tartalmazza a másikat. [3.11]
9. Az  $\{1, 2, \dots, 100\}$  halmaznak hány páratlan elemszámú részhalmaza van?
10. Az  $\{1, 2, \dots, 100\}$  halmaznak hány olyan részhalmaza van, amelyben az elemek összege páratlan?
- 11.+ A  $\{2, 4, 6, \dots, 16\}$  halmaz összes részhalmozára kiszámoljuk az elemek összegének utolsó számjegyét. Igazoljuk, hogy minden lehetséges végződés páros sokszor fordul elő!
12. Az alábbiak közül mely természetes számokból van több 1.000.000-ig:
- (i) amelyek csak 1, 2 és 5 számjegyeket tartalmaznak (mindegyiket legalább egyszer),
  - (ii) amelyek csak 3, 8 és 9 számjegyeket tartalmaznak (mindegyiket legalább egyszer),
  - (iii) amelyek csak 3, 8 és 0 számjegyeket tartalmaznak (mindegyiket legalább egyszer)?
13. Hányféleképpen bonthatjuk fel az  $n$  számot pozitív egészek összegére, ha a tagok sorrendje is számít, és az egytagú összeg is megengedett? (Például  $n = 3$  esetén 4 ilyen felbontás van:  $1 + 1 + 1 = 1 + 2 = 2 + 1 = 3$ .)
- 14.+ Igazoljuk, hogy ha egy  $n$ -re tekintjük az előző feladatbeli összes felbontást, akkor a felbontásokban szereplő tagok száma összesen  $(n + 1)2^{n-2}$  lesz.

15.

$$\sum_{R \subseteq [n]} |R| = ?$$

16.+ Ha  $M$  egy egész számokból álló véges halmaz, akkor jelöljük  $S(M)$ -mel azt az összeget, amelyet úgy kapunk, hogy  $M$  elemeit csökkenő sorrendbe rendezzük, és a tagokat felváltva pozitív és negatív előjellel látjuk el. Például

$$S(\{1, 2, 5, 6, 9\}) = 9 - 6 + 5 - 2 + 1 = 7, \quad S(\{3\}) = 3.$$

Mekkora az  $S(M)$  összegek összege, ha  $M$  befutja az  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  halmaz összes nemüres részhalmozát? [3.36]

17. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tau(j) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{n}{i} \right\rfloor \approx \ln n,$$

ahol  $\tau(j)$  a  $j$  szám osztóinak számát jelöli.

**18.** Igaz-e, hogy minden  $k$  természetes számnak létezik olyan többszöröse, amely csak 0 és 1 számjegyeket tartalmaz? [1.8]

**19.<sup>+</sup>** Egy matematikaversenyen 200 résztvevő vett részt, ahol 6 feladatot kellett megoldaniuk. Minden feladatra legalább 120 helyes megoldás érkezett. Bizonyítsuk be, hogy van két olyan versenyző, hogy mindegyik problémát megoldotta legalább az egyikük. [IMC]